KAPITEL 5 / *CHAPTER 5*[5]
ABOUT THE INVARIANT TORS OF CALCULATION SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS CONTAINING DEVIATIONS OF A DISCRETE ARGUMENT
ПРО ІНВАРІАНТНІ ТОРИ ЗЛІЧЕННИХ СИСТЕМ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ, ЩО МІСТЯТЬ ВІДХИЛЕННЯ ДИСКРЕТНОГО АРГУМЕНТУ

DOI: 10.30890/2709-2313.2022-09-01-012

Вступ

Перші вагомі результати про інваріантні тороїдальні многовиди систем нелінійної механіки були одержані в роботах М.М. Боголюбова і М.М. Крилова та надалі були розвинуті в роботах Ю.О. Митропольського, що призвело до створення методу інтегральних многовидів нелінійної механіки. Значний внесок у теорію збурення інваріантних тороїдальних многовидів внесли Я. Курцвейль, S.P. Diliberto, J.K. Hale, I. Kupka, J.H.Kyner. В 1960-1970 роках J. Moser і R.J. Sacker опублікували серію робіт, які практично завершили створення цієї теорії.

Роботи Ю.О. Митропольського, А.Г. Ілюхіна та інших математиків показали, що до розв'язування багатьох задач, в яких розглядаються коливання систем з розподіленими параметрами, зручно використовувати апарат зліченних систем звичайних диференціальних рівнянь [1]. Прикладом такої задачі є задача про поперечні коливання стержня, навантаженого осьовою періодичною змінною силою. До таких систем приводять також і задачі з різних розділів теоретичної фізики.

В 1970 році А.М. Самойленко запропонував новий метод побудови і дослідження інваріантних тороїдальних многовидів систем звичайних диференціальних рівнянь, визначених на m-вимірних торах. Тепер цей метод називають методом функції Гріна-Самойленка (ФГС) задачі про інваріантні тори [2]. Він виявився винятково продуктивним, особливо стосовно теорії нелінійних коливань.

Також, протягом останнього десятиріччя опубліковано декілька наукових праць, в яких метод ФГС застосовано до дослідження інваріантних торів зліченних систем диференціально-різницевих та різницевих рівнянь. Проте цих праць зовсім мало і вони далеко не вирішують проблему побудови теорії

[5] *Authors: Marchuk N.A., Semenishina I.V.*

інваріантних тороїдальних многовидів для систем вказаного виду. Оскільки різницеві рівняння є дискретними аналогами диференціальних, то стає зрозумілою доцільність розвинення теорії інваріантних торів для зліченних систем різницевих рівнянь, чому і присвячене дане дослідження.

5.1. Дослідження властивостей неперервності та гладкості інваріантних торів зліченних систем різницевих рівнянь

Методом ФГС доведено чотири теореми, в яких сформульовано результати дослідження властивостей неперервності та гладкості інваріантних торів зліченних систем різницевих рівнянь, що визначені на скінченновимірних торах та містять відхилення дискретного аргументу [3]. Розглянемо систему рівнянь.

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + a(\varphi_n,\ \mu), \quad x_{n+1} = P(\varphi_{n+p},\ \mu)x_n + c(\varphi_{n+g+1},\ \mu), \tag{1.1}$$

в якій $\varphi = (\varphi^1,\ \varphi^2, \ldots, \varphi^m) \in R^m$, $x = (x^1, x^2, x^3, \ldots) \in$ **m,** де **m** — простір обмежених числових послідовностей з нормою $\|x\| = \sup_i \{|x^i|\}$; функції $a(\varphi,\ \mu) = \{a_1(\varphi,\ \mu),\ a_2(\varphi,\ \mu),\ \ldots,\ a_m(\varphi,\ \mu)\}$, $c(\varphi, \mu) = \{c_1(\varphi, \mu), c_2(\varphi, \mu), \ldots\}$
і нескінченна матриця $P(\varphi,\ \mu) = [p_{ij}(\varphi,\ \mu)]_{i,j=1}^{\infty}$ дійсні та періодичні відносно $\varphi^i\ (i = \overline{1,\ m})$ з періодом 2π; $n \in Z$, Z — множина цілих чисел; p і g — цілочислові параметри, які зумовлюють відхилення аргументу; $\mu \in \sigma = (\mu_1,\ \mu_2) \subset R^1$ — дійсний параметр.

Інтерпретуючи φ^i як кутові координати, вважатимемо, що система рівнянь (1.1) визначена на m - вимірному торі T_m.

Надалі вважатимемо також, що відображення $\Phi(\varphi,\ \mu) = \varphi + a(\varphi,\ \mu)$: $R^m \to R^m$ оборотне при кожному $\mu \in \sigma$,

$$\|a(\varphi,\ \mu)\| \le A^0,\ \|c(\varphi,\ \mu)\| \le C^0,\ \|P(\varphi,\ \mu)\| = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |p_{ij}(\varphi,\ \mu)| \le P^0,$$

причому $A^0,\ P^0,\ C^0$ — додатні сталі, що не залежать від $\varphi \in T_m,\ \mu \in \sigma.$

Через $\varphi_n(\varphi, \mu)$ позначимо розв'язок першого рівняння (1.1), такий, що $\varphi_0(\varphi,\ \mu) = \varphi \in T_m$ при кожному $\mu \in \sigma$.

Інваріантним тором $\mathbf{T}(p, g, \mu)$ системи рівнянь (1.1) називають множину точок $x \in$ **m**: $x = u(p, g, \mu, \varphi) = (u_1(p, g, \mu, \varphi),\ u_2(p, g, \mu, \varphi), \ldots)$, $\varphi \in T_m$, якщо функція

ISBN 978-3-949059-50-6

$u(p,g,\mu,\varphi)$ визначена при будь-яких $\{p,g\}\subset Z$, $\varphi\in R^m$, $\mu\in\sigma$, 2π- періодична відносно $\varphi^i\,(i=1,2,3,\dots,m)$, обмежена за нормою $\|\cdot\|$ і при будь-яких $\varphi\in T_m$, $\mu\in\sigma$ задовольняє рівність

$$u(p,g,\mu,\varphi_{n+1}(\varphi,\mu))=\mathrm{P}(\varphi_{n+p}(\varphi,\mu),\mu)u(p,g,\mu,\varphi_n(\varphi,\mu))+c(\varphi_{n+g+1}(\varphi,\mu),\mu).$$

Цей тор називають неперервним або гладким відносно $\varphi,\mu,$ якщо відповідну властивість має породжуюча його функція $u(p,g,\mu,\varphi)$. [4]

Скажемо, що однорідне рівняння

$$x_{n+1}=\mathrm{P}(\varphi_{n+p}(\varphi,\mu),\mu)x_n,\ n\in Z, \tag{1.2}$$

(або рівняння (1.1)) має ФГС, якщо існують матрицант $\Omega_l^n(p,\varphi,\mu)$ рівняння (1.2) і 2π- періодична відносно $\varphi^i\,(i=1,2,3,\dots,m)$ обмежена за нормою нескінченна матриця $C(\varphi,\mu)$, така, що функція

$$G_0(l,p,\mu,\varphi)=\begin{cases}\Omega_l^0(p,\varphi,\mu)C(\varphi_{l+p}(\varphi,\mu),\mu), & \text{якщо } l\le 0;\\ \Omega_l^0(p,\varphi,\mu)[C(\varphi_{l+p}(\varphi,\mu),\mu)-E], & \text{якщо } l>0\end{cases}$$

задовольняє нерівність $\|G_0(l,p,\mu,\varphi)\|\le M\lambda^{|l|}$ для всіх $\{p,l\}\subset Z$, $\varphi\in T_m$, $\mu\in\sigma$, де M і $\lambda<1$ додатні сталі, що не залежать від p,l,φ,μ, E — нескінченна одинична матриця.

Розглянемо питання неперервності інваріантного тору системи рівнянь (1.1). Система рівнянь виду (1.1), яка не залежить від параметра μ :

$$\varphi_{n+1}=\varphi_n+a(\varphi_n),\ x_{n+1}=P(\varphi_{n+p})x_n+c(\varphi_{n+g+1}) \tag{1.3}$$

Через $C^0_{Lip}(T_m)$ позначимо множину ліпшіцевих відображень $f(\varphi)$, визначених на T_m. . Додатну сталу *К*, яка забезпечує нерівність $\|f(\varphi)-f(\overline{\varphi})\|\le K\|\varphi-\overline{\varphi}\|$, назвемо коефіцієнтом, з яким $f(\varphi)$ входить у цю множину.

Для системи (1.3) доведено наступне твердження, яке навіть у випадку, коли відхилення дискретного аргументу відсутні, суттєво розширює множину систем лінійних рівнянь, для яких існує інваріантний тор, що розглядалися в роботах Д.І. Мартинюка та Г.В. Верьовкіної [5].

Теорема 1.1. *Нехай при* $p=0$ *існує* ФГС *рівняння* $x_{n+1}=P(\varphi_{n+p}(\varphi))x_n$, $n\in Z$, *і виконуються умови:*

1) при будь-яких $\varphi\in T_m$ *і p = 0 це рівняння має єдиний обмежений на множині Z розв'язок* $x_n=0$;

2) $\{a(\varphi), P(\varphi), c(\varphi), \Phi^{-1}(\varphi)\}\subset C^0_{Lip}(T_m)$ *з коефіцієнтами* α,β,γ,ξ *відповідно.*

Тоді існує інваріантний тор системи рівнянь (1.3), породжуюча функція *якого задовольняє умову Гельдера*

$$\left\|u(p,g,\varphi)-u(p,g,\overline{\varphi})\right\| \le \Delta\left\|\varphi-\overline{\varphi}\right\|^{\frac{v}{2(v+1)}},$$

де $\Delta>0$ *— стала, що не залежить від* $\{\varphi,\overline{\varphi}\}\subset T_m$, v *— довільне додатне число, яке задовольняє нерівність* $\frac{v}{v+1}<-\log_{1+\alpha}\lambda$ *при* $\xi\le 1$ *і нерівність* $\frac{v}{v+1}<\min\left\{-\log_{1+\alpha}\lambda,\ -\log_{\xi}\lambda\right\}$ *при* $\xi>1$.

При цьому побудовано алгоритм відшукання сталої Δ і для прикладу знайдено її значення у випадку, коли $p>0,\ g>0, \xi\le 1$.

Через $\omega(z)$ позначимо деяку неперервну неспадну на відрізку $[0;\ \mu_2-\mu_1]$ скалярну функцію таку, що $\omega(0)=0$. Справджується наступне твердження.

Теорема 1.2. *Нехай при p = 0 існує ФГС рівняння (1.2) і при всіх* $\{\varphi,\overline{\varphi}\}\subset T_m$**,** $\{\mu,\ \overline{\mu}\}\subset\sigma$**:**

$$1)\ \left\|a(\varphi,\mu)-a(\overline{\varphi},\overline{\mu})\right\| \le \alpha_1\left\|\varphi-\overline{\varphi}\right\|+\alpha_2\omega(|\mu-\overline{\mu}|),$$
$$\left\|P(\varphi,\mu)-P(\overline{\varphi},\overline{\mu})\right\| \le \beta_1\left\|\varphi-\overline{\varphi}\right\|+\beta_2\omega(|\mu-\overline{\mu}|),$$
$$\left\|c(\varphi,\mu)-c(\overline{\varphi},\overline{\mu})\right\| \le \gamma_1\left\|\varphi-\overline{\varphi}\right\|+\gamma_2\omega(|\mu-\overline{\mu}|),$$
$$\left\|\Phi^{-1}(\varphi,\mu)-\Phi^{-1}(\overline{\varphi},\overline{\mu})\right\| \le \xi_1\left\|\varphi-\overline{\varphi}\right\|+\xi_2\omega(|\mu-\overline{\mu}|),$$

де $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,\xi_i\ (i=1,2)$ *— додатні сталі, що не залежать від* $\varphi,\mu,\overline{\varphi},\overline{\mu}$;

2) при p = 0 рівняння (1.2) має єдиний обмежений на Z розв'язок $x_n=0$;

3) $\xi_1\ge 1,\ \ \lambda<\min\left\{\frac{1}{1+\alpha_1};\frac{1}{\xi_1}\right\}.$

Тоді функція $u(p,g,\mu,\varphi)$, *породжуюча інваріантний тор системи рівнянь (1.1), неперервна за сукупністю змінних* φ,μ, *причому стверджується нерівність*

$$\left\|u(p,g,\mu,\varphi)-u(p,g,\overline{\mu},\overline{\varphi})\right\| \le M_\bullet\left\{\left\|\varphi-\overline{\varphi}\right\|+\omega(\mu-\overline{\mu})\right\}^{\frac{1}{2}}+$$
$$+\left\|\varphi-\overline{\varphi}\right\|+\omega(|\mu-\overline{\mu}|),$$

де $M_\bullet$ *— додатна стала, яка не залежить від* $\varphi,\mu,\overline{\varphi},\overline{\mu}$.

Наступне твердження дозволяє опустити третю умову у формулюванні теореми 1.2.

Наслідок 1.1. *Нехай виконуються всі умови теореми 1.2, крім третьої. Тоді функція* $u(p,g,\mu,\varphi)$ *неперервна за сукупністю змінних* $\varphi,\ \mu$, *причому з деякого моменту в процесі* $\left\|\varphi-\overline{\varphi}\right\|\to 0,\ |\mu-\overline{\mu}|\to 0$ *справджується нерівність*

 ISBN 978-3-949059-50-6

$\|u(p,g,\mu,\varphi)-u(p,g,\overline{\mu},\overline{\varphi})\| \le M^{\bullet}\{\|\varphi-\overline{\varphi}\|+\omega(|\mu-\overline{\mu}|)\}^{\frac{v}{2(v+1)}}$, *де* $M^{\bullet}$ *— додатна стала, що не залежить від* $\{\varphi,\overline{\varphi}\}\subset T_m$, $\{\mu,\overline{\mu}\}\subset\sigma$, *а* v *— довільне додатне число, яке задовольняє умову*

$$\frac{v}{v+1} < \min\{-\log_{\xi_1}\lambda;\ -\log_{(1+\alpha_1)}\lambda\},\ \xi_1 > 1.$$

Якщо функція $a(\varphi,\mu)$ не залежить від μ, то умови неперервності функції $u(p,g,\mu,\varphi)$ відносно параметра μ значно спрощуються, що продемонстровано на прикладі.

Зауважимо, що результати зберігаються у випадку, коли тор, на якому розглядається система рівнянь (1.1), є нескінченновимірним, тобто $\varphi=\{\varphi^1,\varphi^2,\varphi^3,...\}$ [6].

5.2. Диференційовність інваріантного тору системи рівнянь (1.1) за параметром μ та кутовою змінною φ

При диференційовності інваріантного тору системи рівнянь (1.1) за параметром μ та кутовою змінною φ вважається, що матриця диференціюється поелементно, а вектор-функція — покоординатно [7].

Спочатку розглянемо випадок, коли існує матрицант $\Omega_l^n(p,\varphi,\mu)$ рівняння (1.2), який задовольняє нерівність

$$\|\Omega_l^n(0,\varphi,\mu)\| \le M\lambda^{l-n},\ l>n, \tag{1.4}$$

де $M>0$ *і* $0<\lambda<1$ — сталі, які не залежать від $\varphi,\ \mu$.

Через $C^1(\varphi),\ C^1(\mu),\ C^1(\varphi,\mu)$ позначимо множини періодичних відносно $\varphi^i(i=\overline{1,m})$ з періодом 2π вектор-функцій і матриць, що залежать від $\varphi\in R^m,\ \mu\in\sigma,$ координати та елементи яких неперервно диференційовані відносно $\varphi^i(i=\overline{1,m})$, $\mu\in\sigma,\ \varphi^i(i=\overline{1,m})$ та $\mu\in\sigma$ відповідно. Вирази $\sup_i\sum_{j=1}^{\infty}\sup_{\varphi\in T_m}|p_{ij}(\varphi,\mu)|$ та $\sup_i\sum_{j=1}^{\infty}\sup_{\varphi\in T_m,\mu\in\sigma}|p_{ij}(\varphi,\mu)|$ позначимо відповідно через $\|P(\varphi,\mu)\|_{\varphi}$ та $\|P(\varphi,\mu)\|_{\varphi\mu}$. Справджується наступне твердження.

ISBN 978-3-949059-50-6

Теорема 1.3. *Нехай* $\forall \mu \in \sigma, \varphi \in T_m$ *існує обмежена за нормою* $\|\cdot\|$ *обернена до* $P(\varphi, \mu)$ *матриця і справджуються наступні умови:*

1) матрицант рівняння (1.2) задовольняє нерівність (1.4), в якій норму $\|\cdot\|$ *замінено нормою* $\|\cdot\|_{\varphi\mu}$*;*

2) $\{a(\varphi, \mu), P(\varphi, \mu), c(\varphi, \mu)\} \subset C^1(\varphi, \mu)$*, причому*

$$\max\left\{\left\|\frac{\partial P(\varphi, \mu)}{\partial \varphi^i}\right\|_{\varphi\mu}, \left\|\frac{\partial P(\varphi, \mu)}{\partial \mu}\right\|_{\varphi\mu}\right\} \le P^{\bullet}, \max\left\{\left\|\frac{\partial a(\varphi, \mu)}{\partial \varphi^i}\right\|, \left\|\frac{\partial a(\varphi, \mu)}{\partial \mu}\right\|\right\} \le A^{\bullet},$$

$$\max\left\{\left\|\frac{\partial c(\varphi, \mu)}{\partial \varphi^i}\right\|, \left\|\frac{\partial c(\varphi, \mu)}{\partial \mu}\right\|\right\} \le C_{\bullet},$$

де $P^{\bullet}, A^{\bullet}, C_{\bullet}$ *— додатні сталі, що не залежать від* $i = \overline{1, m},$ μ *та* φ*;*

3) $\lambda\left(1 + mA^{\bullet}\right) < 1$.

Тоді при будь-яких $p \ge 0,\ g \ge -1$ *функція* $u(p, g, \mu, \varphi) \in C^1(\varphi, \mu)$.

Наслідок 1.3. *Нехай* $\forall \mu \in \sigma, \varphi \in T_m$ *існує обмежена за нормою* $\|\cdot\|$ *обернена до* $P(\varphi, \mu)$ *матриця, виконується умова 1 теореми 1.3,* $a(\varphi, \mu) = \omega,$ *де* ω *— сталий вектор, і* $\{P(\varphi, \mu), c(\varphi, \mu)\} \subset C^1(\varphi, \mu)$*, причому*

$$\max\left\{\left\|\frac{\partial P(\varphi, \mu)}{\partial \mu}\right\|_{\mu}, \left\|\frac{\partial P(\varphi, \mu)}{\partial \varphi^i}\right\|_{\varphi}, \left\|\frac{\partial c(\varphi, \mu)}{\partial \mu}\right\|, \left\|\frac{\partial c(\varphi, \mu)}{\partial \varphi^i}\right\|\right\} \le C,$$

де C — додатна стала, що не залежить від $i = \overline{1, m},$ μ *та* φ.

Тоді при будь-яких $\{p, g\} \subset Z$ *функція* $u(p, g, \mu, \varphi) \in C^1(\varphi, \mu)$.

І, нарешті, доведено наступний загальний результат.

Теорема 1.4. *Нехай* $\forall \mu \in \sigma, \varphi \in T_m$ *справджуються наступні умови:*

1) при $p = 0$ *рівняння (1.2) має єдиний обмежений на множині* Z *розв'язок* $x_n = 0$ *та ФГС таку, що* $\|G_0(l, 0, \mu, \varphi)\|_{\varphi\mu} \le M\lambda^{|l|}$;

2) $\left\{a(\varphi, \mu), P(\varphi, \mu), c(\varphi, \mu), \Phi^{-1}(\varphi, \mu)\right\} \subset C^1(\varphi, \mu)$*, причому*

$$\max\left\{\left\|\frac{\partial P(\varphi, \mu)}{\partial \varphi^i}\right\|_{\varphi\mu}, \left\|\frac{\partial P(\varphi, \mu)}{\partial \mu}\right\|_{\varphi\mu}\right\} \le P^{\bullet};\ \max\left\{\left\|\frac{\partial a(\varphi, \mu)}{\partial \varphi^i}\right\|, \left\|\frac{\partial a(\varphi, \mu)}{\partial \mu}\right\|\right\} \le A^{\bullet};$$

$$\max\left\{\left\|\frac{\partial c(\varphi, \mu)}{\partial \varphi^i}\right\|, \left\|\frac{\partial c(\varphi, \mu)}{\partial \mu}\right\|\right\} \le C_{\bullet};\ \max\left\{\left\|\frac{\partial \Phi^{-1}(\varphi, \mu)}{\partial \varphi^i}\right\|, \left\|\frac{\partial \Phi^{-1}(\varphi, \mu)}{\partial \mu}\right\|\right\} \le \Phi_{\bullet},$$

де $P^{\bullet}, A^{\bullet}, C_{\bullet}, \Phi_{\bullet}$ *— додатні сталі, що не залежать від* $i = \overline{1, m},$ μ *та* φ*;*

ISBN 978-3-949059-50-6

3) $\lambda < \min\left\{\frac{1}{m\Phi_{\bullet}};\ \frac{1}{1+mA^{\bullet}}\right\}$.

Тоді при будь-яких $\{p,\ g\} \subset Z$ *функція* $u(p, g, \mu, \varphi) \in C^1(\varphi, \mu)$.

Зауважимо, що при заміні нерівності (1.4) нерівністю $\left\|\Omega_l^n(0, \varphi, \mu)\right\| \le M\ \lambda^{n-l},\ l < n,$ ситуація спрощується і не потребує оборотності матриці $P(\varphi, \mu)$.

5.3. Неперервна диференційованість інваріантного тору системи рівнянь (1.5) за кутовою змінною до порядку $\rho \ge 2$

Розглянемо теорему 2.1 (умова теореми нижче), яка встановлює достатні умови неперервної диференційованості інваріантного тору системи рівнянь (1.5) за кутовою змінною до порядку $\rho \ge 2$ [8]. Цю теорему доведено методом повної математичної індукції відносно ρ за допомогою укорочення системи (1.5) відносно x.

Розглянемо укорочену систему рівнянь

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + a(\varphi_n),\ \overset{(s)}{x}_{n+1} = \overset{(s)}{P}\left(\varphi_{n+p}\right)\overset{(s)}{x}_n + \overset{(s)}{c}\left(\varphi_{n+g+1}\right),$$

що відповідає системі (1.5). Тут

$$\overset{(s)}{x} = \left(x^1, x^2, \ldots, x^s\right),\ \overset{(s)}{c}(\varphi) = \{c_1(\varphi), c_2(\varphi), \ldots, c_s(\varphi)\},\ \overset{(s)}{P}(\varphi) = \left[p_{ij}(\varphi)\right]_{i,j=1}^s.$$

Через $\overset{(s)}{\Omega}{}_l^n(p, \varphi)$ позначимо матрицант рівняння $\overset{(s)}{x}_{n+1} = \overset{(s)}{P}\left(\varphi_{n+p}(\varphi)\right)\overset{(s)}{x}_n$.

Домовимось через $D_\varphi^s\left(\Xi\left(\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^m\right)\right)$ позначати довільну похідну s-го порядку від функції $\Xi(\varphi)$ відносно $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^m$ і нагадаємо, що вектор-функції диференціюються покоординатно, а матриці — поелементно. Скажемо, що $\Xi(\varphi) \in C_{Lip}^\rho(\varphi)$ з коефіцієнтом α, якщо для всіх $0 \le s \le \rho$ справджується нерівність $\left\|D_\varphi^s(\Xi(\varphi) - \Xi(\overline{\varphi}))\right\| \le \alpha\|\varphi - \overline{\varphi}\|,$, де α —додатна стала, що не залежить від s та $\{\varphi, \overline{\varphi}\} \subset T_m$.

Теорема 2.1. *Нехай для всіх натуральних* s *і* $\varphi \in T_m$ *виконуються умови:*

1) $\{a(\varphi), P(\varphi), c(\varphi)\} \subset C^{\rho}_{Lip}(\varphi)$, *причому* $a(\varphi)$*— з коефіцієнтом* α_0*;*

2) $\left\| D^l_\varphi (P(\varphi)) \right\| \le P^\bullet$, $\left\| D^l_\varphi (a(\varphi)) \right\| \le A^\bullet$, $\left\| D^l_\varphi (c(\varphi)) \right\| \le C^\bullet$,

де $1 \le l \le \rho$ *та додатні сталі* $P^\bullet, A^\bullet, C^\bullet$ *не залежать від* l *і* φ*;*

3) матриця $\overset{(s)}{P}(\varphi)$ *невироджена;*

4) при всіх цілих $l > n$ *справджується нерівність* $\left\| \overset{(s)}{\Omega}{}^n_l(0,\varphi) \right\| \le M\lambda^{l-n}$, *де сталі* $M > 0$ *і* $0 < \lambda < 1$ *не залежать від* s *і* φ;

5) послідовність $\left\{ \overset{(s)}{P}{}^{-1}(\varphi) \right\}_{s=1}^{\infty}$ *обернених до* $\overset{(s)}{P}(\varphi)$ *матриць правильна і* $\left\| \overset{(s)}{P}{}^{-1}(\varphi) \right\| \le P_1$,

де додатна стала P_1 *не залежить від* s *і* φ.

Якщо при цьому $\lambda(1+\alpha_0)(1+mA^\bullet)^\rho < 1$, *то для будь-яких цілих* $g \ge -1,\ p \ge 0$ *породжуюча інваріантний тор системи рівнянь (1.5) функція* $u(p,g,\varphi)$ *належить* $C^{\rho}_{Lip}(\varphi)$.

Якщо в системі рівнянь (1.5) $a(\varphi) = \omega$, де ω— сталий вектор, то твердження теореми 2.1 справджується при всіх цілих p *і* g [8].

5.4. Існування інваріантного тору лінійної та нелінійної системи рівнянь

Лінійна та квазілінійна системи рівнянь

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + a(\varphi_n, \mu), \quad x_{n+1} = P(\varphi_{n+p}, \mu)x_n + c(\varphi_{n+g+1}, \mu), \tag{3.1}$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + a(\varphi_n, \mu), \ x_{n+1} = P(\varphi_{n+p}, \mu)x_n + c(\varphi_{n+g+1}, \mu, x_{n+1}), \tag{3.2}$$

в яких $n \in Z$, $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \ldots) \in$ **m**, $x \in$ **m**, $\mu \in S \subset$ **m**, де S— відкрита куля в **m**, функція $c(\varphi, \mu, x)$ визначена на множині **m**$\times S \times D$, $D = \{x \in \mathbf{m} \mid \|x\| \le d = const > 0\}$ і на цій множині $\|c(\varphi, \mu, x)\| \le C^0 = const.$ Декартовий добуток **m**$\times S$ позначимо через Λ, нескінченновимірний тор — через T_∞, а множину відображень, визначених та неперервно диференційованих за Фреше відносно (φ, μ) на Λ— через $C^1_\Lambda(\varphi, \mu)$.

Вважатимемо, що відображення $\Phi(\varphi, \mu) = \varphi + a(\varphi, \mu)$: **m** $\to$ **m** оборотне при кожному $\mu \in S$, $\|a(\varphi, \mu)\| \le A^0$, $\|c(\varphi, \mu)\| \le C^0$, $\|P(\varphi, \mu)\| \le P^0$, причому A^0, P^0, C^0— додатні

 ISBN 978-3-949059-50-6

сталі, що не залежать від $\varphi \in T_\infty, \mu \in S$.

Теорема 3.1. *Нехай* $\forall \mu \in S$ *та* $\forall \varphi \in T_\infty$ *існує матриця* $P^{-1}(\varphi,\mu)$, $\left\|P^{-1}(\varphi,\mu)\right\| \le P_1 = const > 0$ *і справджуються умови:*

1) $\{a(\varphi,\mu),\ P^{-1}(\varphi,\mu),\ c(\varphi,\mu),\ \Phi^{-1}(\varphi,\mu)\} \subset C^1_\Lambda(\varphi,\mu)$, *причому*

$$\left\|\frac{da(\varphi,\mu)}{d(\varphi,\mu)}\right\| \le A^\bullet;\ \left\|\frac{d\Phi^{-1}(\varphi,\mu)}{d(\varphi,\mu)}\right\| \le \Phi_\bullet,\ \left\|\frac{dP^{-1}(\varphi,\mu)}{d(\varphi,\mu)}\right\| \le P_\bullet,\ \left\|\frac{dc(\varphi,\mu)}{d(\varphi,\mu)}\right\| \le C_\bullet,$$

де $A^\bullet, \Phi_\bullet, P_\bullet, C_\bullet$ *— додатні сталі, що не залежать від* $(\varphi,\mu) \in \Lambda$;

2) $P_1 < \dfrac{1}{1+A^\bullet}$.

Тоді при всіх $\{p,g\} \subset Z$ *система рівнянь (3.1) має інваріантний тор, диференційований за Фреше відносно* (φ,μ) *на множині* Λ.

Зауважимо, що при невід'ємних p і $g \ge -1$ не потрібно вимагати диференційованості відображення $\Phi^{-1}(\varphi,\mu)$ на Λ.

Наступне твердження корисне у випадку, коли матриця $P(\varphi,\mu)$ або не є оборотною на Λ, або умова 2 теореми 3.1 не виконується.

Наслідок 3.2. *Нехай справджується умова 1 теореми 3.1, в якій матрицю* $P^{-1}(\varphi,\mu)$ *замінено матрицею* $P(\varphi,\mu)$, *і* $P^0 < \dfrac{1}{\Phi_\bullet}\ (\Phi_\bullet > 1)$. *Тоді при всіх* $\{p,g\} \in Z$ *система рівнянь (3.1) має інваріантний тор, диференційований за Фреше відносно* (φ,μ) *на множині* Λ.

Наступне твердження стосується випадку, коли умови теореми 3.1 та наслідку 3.2 не виконуються, але ФГС системи рівнянь (3.1) існує.

Наслідок 3.3. *Нехай справджуються наступні умови:*

1) при $p = 0$ *існує ФГС системи рівнянь (3.1);*

2) $\{a(\varphi,\mu),\ c(\varphi,\mu),\ \Phi^{-1}(\varphi,\mu),\ G_0(l,p,\mu,\varphi)\} \subset C^1_\Lambda(\varphi,\mu)$, *причому*

$$\left\|\frac{da(\varphi,\mu)}{d(\varphi,\mu)}\right\| \le A^\bullet;\ \left\|\frac{d\Phi^{-1}(\varphi,\mu)}{d(\varphi,\mu)}\right\| \le \Phi_\bullet,\ \left\|\frac{dc(\varphi,\mu)}{d(\varphi,\mu)}\right\| \le C_\bullet,$$

де $A^\bullet, \Phi_\bullet, C_\bullet$ *— додатні сталі, що не залежать від* $(\varphi,\mu) \in \Lambda$;

3) $\lambda < \min\left\{\dfrac{1}{\Phi_\bullet};\ \dfrac{1}{1+A^\bullet}\right\}$;

4) ряд $\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left\|\dfrac{dG_0(l,p,\mu,\varphi)}{d(\varphi,\mu)}\right\|$ *збігається рівномірно відносно* $(\varphi,\mu) \in \Lambda$.

Тоді при всіх $\{p,g\} \subset Z$ *система рівнянь (3.1) має інваріантний тор, диференційований за Фреше відносно* (φ,μ) *на множині* Λ.

ISBN 978-3-949059-50-6

Позначимо через D_ρ і D_0 множини $\{x \in \mathbf{m} \mid \|x\| < d + \rho\}$ і $\mathbf{m} \times S \times D_\rho$ відповідно. Тут ρ — як завгодно мала додатна стала. Наступне твердження наводить достатні умови диференційованості інваріантного тору системи рівнянь (3.2) у сенсі Фреше.

Теорема 3.2. *Нехай справджуються наступні умови:*

1) при $p = 0$ *існує ФГС системи рівнянь (3.1);*

2) $\{a(\varphi, \mu), \ \Phi^{-1}(\varphi, \mu), \ G_0(l, p, \mu, \varphi)\} \subset C^1_\Lambda(\varphi, \mu); \ c(\varphi, \mu, x) \in C^1_{D_0}(\varphi, \mu, x),$

причому

$$\left\| \frac{da(\varphi, \mu)}{d(\varphi, \mu)} \right\| \le A^\bullet; \ \left\| \frac{d\Phi^{-1}(\varphi, \mu)}{d(\varphi, \mu)} \right\| \le \Phi_\bullet, \ \left\| \frac{dc(\varphi, \mu, x)}{d(\varphi, \mu, x)} \right\| \le C_\bullet,$$

$$\left\| \frac{dG_0(l, p, \mu, \varphi)}{d(\varphi, \mu)} \right\| \le M_1(p)\lambda_1^{|l|}, \ \left\| \frac{dc(\varphi, \mu, x)}{d(\varphi, \mu, x)} - \frac{dc(\varphi, \mu, \bar{x})}{d(\varphi, \mu, x)} \right\| \le L_0 \|x - \bar{x}\|,$$

де $A^\bullet, \Phi_\bullet > 1, C_\bullet, M_1(p), L_0$ — *додатні сталі, що не залежать від* $(\varphi, \mu) \in \Lambda, \{x, \bar{x}\} \subset D_\rho; \ 0 < \lambda_1 = const < 1$ *і не залежить від* l, p, μ, φ*;*

3) $C_0 \le \dfrac{d(1-\lambda)}{1+\lambda}; \ \max\left\{MC_\bullet \dfrac{1+\delta\lambda}{1-\delta\lambda}; \ \delta\lambda\right\} < 1,$ *де* $\delta = \max\{\Phi_\bullet, \ 1 + A^\bullet\}$

Тоді система рівнянь (3.2) має інваріантний тор, породжуюча функція якого $u(p, g, \mu, \varphi) \in C^1_\Lambda(\varphi, \mu)$ *при всіх* $\{p, g\} \subset Z$.

У наступному випадку одержано достатні умови існування інваріантного тору нелінійної системи рівнянь

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + a(\varphi_n, \mu), \ x_{n+1} = P(\varphi_{n+p}, \ \mu, \ x_{n+k})x_n + c(\varphi_{n+g+1}, \ \mu), \ n \in Z, \tag{3.3}$$

для якої виконуються вимоги, накладені на систему (3.1), $k \in Z$ — цілочисловий параметр, $\|P(\varphi, \ \mu, x)\| = \sup\limits_i \sum\limits_{j=1}^{\infty} |p_{ij}(\varphi, \ \mu, x)| \le P^0$ для всіх $x \in D.$

Теорема 3.3. *Нехай на множині* $D^0 = \Lambda \times D$ *матриця* $P(\varphi, \mu, x)$ *оборотна,* $\|P^{-1}(\varphi, \mu, x)\| \le P_1$ *і справджуються наступні умови:*

1) матриця $P(\varphi, \mu, x)$ *є ліпшіцевою відносно змінної x з коефіцієнтом, що не залежить від* φ, μ, x*;*

2) для всіх $\{x, \bar{x}\} \subset D$, $(\varphi, \mu) \in \Lambda$ *виконується нерівність*

$$\|P^{-1}(\varphi, \mu, x) - P^{-1}(\varphi, \mu, \bar{x})\| \le P_\bullet \|x - \bar{x}\|,$$

ISBN 978-3-949059-50-6

де $P_{\bullet}$ *— додатна стала, що не залежить від* $\varphi, \mu, x, \bar{x}$;

3) справджуються оцінки: $P_1 < 1,\ \eta = C^0 P_{\bullet} \sum_{l=1}^{\infty} P_1^{l-1} l < 1,\ \frac{C^0 P_1}{1 - P_1} \le d.$

Тоді при всіх $\{p, g, k\} \subset Z,\ \mu \in S$ *система рівнянь (3.3) має інваріантний тор.*

Припустимо тепер, що матриця $P(\varphi, \mu, x)$ не є оборотною на D^0, або умова $P_1 < 1$ не виконується, але $P^0 < 1.$ У цьому разі сформулюємо наступне твердження.

Теорема 3. 4. *Нехай на множині* D^0 *справджуються умови:*

1) для всіх $\{x, \bar{x}\} \subset D$ $\|P(\varphi, \mu, x) - P(\varphi, \mu, \bar{x})\| \le P^{\bullet} \|x - \bar{x}\|,$ *де* $P^{\bullet}$ *— додатна стала, що не залежить від* $\varphi, \mu, x, \bar{x}$;

2) виконуються нерівності

$$P^0 < 1,\ \eta^{\bullet} = C^0 P^{\bullet} \sum_{l=1}^{\infty} (P^0)^{l-1} l < 1,\ \frac{C^0}{1 - P^0} \le d.$$

Тоді при всіх $\{p, g, k\} \subset Z,\ \mu \in S$ *система рівнянь (3.3) має інваріантний тор.*

Теорема 3. 5. *Нехай на множині* D^0 *виконуються умови:*

1) при p = 0 *існує ФГС рівняння* $x_{n+1} = P(\varphi_{n+p}(\varphi, \mu), \mu, 0) x_n,\ n \in Z;$

2) для всіх $\{x, \bar{x}\} \subset D$ $\|P(\varphi, \mu, x) - P(\varphi, \mu, \bar{x})\| \le P^{\bullet} \|x - \bar{x}\|,$ *де* $P^{\bullet}$ *— додатна стала, що не залежить від* $\varphi, \mu, x, \bar{x}$;

3) справджуються нерівності

$$d_0 = 2P^0 M \frac{1+\lambda}{1-\lambda} < 1,\ \frac{d_1}{1 - d_0} \le d,\ \xi = \frac{P^{\bullet} d_1^2 \eta_0}{C^0} < 1,$$

де $d_1 = C^0 M \frac{1+\lambda}{1-\lambda}$, *а* η_0 *— сума збіжного ряду* $\sum_{r=1}^{\infty} r\, d_0^{r-1}.$

Тоді при будь-яких $\{p, g, k\} \subset Z,\ \mu \in S$ *існує інваріантний тор системи рівнянь (3.3).*

Наступна система рівнянь

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + a(\varphi_n, \mu),\ x_{n+1} = P(\varphi_{n+p},\ \mu,\ x_{n+k}) x_n + c(\varphi_{n+g+1},\ \mu,\ x_{n+1}), \tag{3.4}$$

в якій $n \in Z$, функція $c(\varphi, \mu, x)$ така, що на множині D^0 справджуються оцінки $\|c(\varphi, \mu, x)\| \le C^0,\ \|c(\varphi,\mu,x) - c(\varphi,\mu,\bar{x})\| \le C_L \|x - \bar{x}\|\ \forall \{x,\ \bar{x}\} \subset D,$ де C_L — додатна стала.

Наслідок 3. 4 (з теорем 3. 3 — 3. 5). *Умови кожної з теорем 3.3 — 3.5 достатні для існування інваріантного тору системи рівнянь (3.5), якщо оцінки*

$\eta < 1,\ \eta^{\bullet} < 1,\ \xi < 1,$ *що в них фігурують, замінити оцінками* $\eta + \dfrac{C_L P_1}{1-P_1} < 1,\ \eta^{\bullet} + \dfrac{C_L}{1-P^0} < 1,\ \xi + \dfrac{MC_L(1+\lambda)}{(1-\lambda)(1-d_0)} < 1$ *відповідно.*

Теорема 3.6. *Нехай на множині* D_0 *ліпшіцева відносно х матриця* $P(\varphi,\mu,x)$ *оборотна ,* $\left\|P^{-1}(\varphi,\mu,x)\right\| \le P_1$ *і справджуються наступні умови:*

$$1)\ \{a(\varphi,\mu),\ c(\varphi,\mu),\ \Phi^{-1}(\varphi,\mu)\} \subset C_{\Lambda}^{1}(\varphi,\mu)\ i\ \ P^{-1}(\varphi,\mu,x) \in C_{D_0}^{1}(\varphi,\mu,x),$$

причому

$$\left\|\frac{da(\varphi,\mu)}{d(\varphi,\mu)}\right\| \le A^{\bullet};\ \left\|\frac{d\Phi^{-1}(\varphi,\mu)}{d(\varphi,\mu)}\right\| \le \Phi_{\bullet},\ \left\|\frac{dP^{-1}(\varphi,\mu,x)}{d(\varphi,\mu,x)}\right\| \le P_{\bullet},\ \left\|\frac{dc(\varphi,\mu)}{d(\varphi,\mu)}\right\| \le C_{\bullet},$$

$$\left\|\frac{dP^{-1}(\varphi,\mu,x)}{d(\varphi,\mu,x)} - \frac{dP^{-1}(\varphi,\mu,\bar{x})}{d(\varphi,\mu,\bar{x})}\right\| \le L\|x-\bar{x}\|,$$

де $\{x,\bar{x}\} \subset D_{\rho},\ A^{\bullet},\Phi_{\bullet},P_{\bullet},C_{\bullet},L$ *— додатні сталі;*

2) виконуються нерівності: $P_1 < \dfrac{1}{1+A^{\bullet}},\ \ \eta = C^0 P_{\bullet} \sum\limits_{l=1}^{\infty} P_1^{l-1} l < 1,\ \ \dfrac{C^0 P_1}{1-P_1} \le d.$

Тоді $\forall g \in Z$ *і таких* $\{p,k\} \subset Z_0^{+} = \{0,1,2,\ldots\}$, *при яких*

$$\max\{p,k\} < \log_{(1+A^{\bullet})} \frac{A^{\bullet}\left(1-P_1\left(1+A^{\bullet}\right)\right)}{C^0 P_{\bullet}} - 1,$$

функція $u(p,g,k,\mu,\varphi)$, *породжуюча інваріантний тор системи (3.3), належить* $C_{\Lambda}^{1}(\varphi,\mu)$.

Якщо матриця $P(\varphi,\mu,x)$ не є оборотною, або умова $P_1 < \dfrac{1}{1+A^{\bullet}}$ не виконується, то теорема 3.6 не має місця. Але може статися, що при цьому $P^0 < \dfrac{1}{\Phi_{\bullet}}$. У цьому випадку доведено наступне важливе твердження.

Наслідок 3. 5. *Нехай на множині* D_0 *справджуються умови:*

$$1)\ \{a(\varphi,\mu),\ c(\varphi,\mu),\ \Phi^{-1}(\varphi,\mu)\} \subset C_{\Lambda}^{1}(\varphi,\mu)\ i\ \ P(\varphi,\mu,x) \in C_{D_0}^{1}(\varphi,\mu,x),$$

причому

$$\left\|\frac{da(\varphi,\mu)}{d(\varphi,\mu)}\right\| \le A^{\bullet};\ \left\|\frac{d\Phi^{-1}(\varphi,\mu)}{d(\varphi,\mu)}\right\| \le \Phi_{\bullet},\ \left\|\frac{dP(\varphi,\mu,x)}{d(\varphi,\mu,x)}\right\| \le P^{\bullet},\ \left\|\frac{dc(\varphi,\mu)}{d(\varphi,\mu)}\right\| \le C_{\bullet},$$

$$\left\|\frac{dP(\varphi,\mu,x)}{d(\varphi,\mu,x)} - \frac{dP(\varphi,\mu,\bar{x})}{d(\varphi,\mu,\bar{x})}\right\| \le L^{\bullet}\|x-\bar{x}\|,$$

де $\{x,\bar{x}\} \subset D_{\rho},\ A^{\bullet},\Phi_{\bullet} > 1, P^{\bullet},C_{\bullet},L^{\bullet}$ *— додатні сталі;*

2) виконуються нерівності:

$$P^0 < \frac{1}{\Phi_\bullet},\ \eta^\bullet = C^0 P^\bullet \sum_{l=1}^{\infty} \left(P^0\right)^{l-1} l < 1,\ \ \frac{C^0}{1-P^0} \le d.$$

Тоді $\forall g \subset Z$ *і таких* $\{p,k\} \subset Z_0^- = \{0,-1,-2,...\}$, *при яких*

$$\max\{-p,-k\} < \log_{\Phi_\bullet} \frac{(\Phi_\bullet - 1)\left(1 - P^0 \Phi_\bullet\right)}{C^0 P^\bullet} - 2,$$

функція $u(p,g,k,\mu,\varphi)$, *породжуюча інваріантний тор системи (3.3), належить* $C^1_\Lambda(\varphi,\mu)$.

На закінчення, як приклад застосування теореми 3.6 та наслідку 3.4, знайдено достатні умови диференційованості в сенсі Фреше інваріантного тору системи (3.4) при невід'ємних відхиленнях $p,g,k.$

Висновки

Завдяки застосуванню метода функції Гріна-Самойленка задачі про інваріантні тори лінійних розширень динамічних систем на торах та використанні основної ідеї методу укорочення К.П. Персидського, створено основу теорії інваріантних тороїдальних многовидів для злічених систем лінійних та нелінійних різницевих рівнянь, що визначені на скінченновимірних та нескінченновимірних торах і містять незалежні відхилення дискретного аргументу, а також досліджено питання існування та властивості гладкості цих многовидів.

Розглянувши достатні умови існування та диференційованості за Фреше інваріантних торів злічених систем різницевих рівнянь різних типів, визначених на нескінченновимірному торі та зробивши відповідні дослідження сформульовано у шість теорем 3.1 — 3.6, що є новими і для скінченновимірних систем різницевих рівнянь.

У даному дослідженні для злічених систем різницевих рівнянь, визначених на торах, одержано наступні основні результати :

— за допомогою методу ФГС запропоновано різні достатні умови неперервності інваріантного тору лінійної системи рівнянь, визначеної на торі, за кутовою змінною φ та сукупністю змінних $\varphi,\ \mu,$ де μ — дійсний параметр;

— запропоновано різні достатні умови неперервної диференційованості інваріантного тору лінійної системи, визначеної на скінченновимірному торі, в залежності від обмежень, що накладаються на неї і, зокрема, на задані відхилення ρ i g;

— методом укорочення знайдено достатні умови неперервної диференційованості за кутовою змінною та параметром до порядку $\rho \geq 2$ інваріантного тору системи лінійних рівнянь, що визначена на скінченновимірному торі, містить відхилення дискретного аргументу і залежить від дійсного числового параметру;

— наведено достатні умови існування та неперервної диференційованості за Фреше відносно (φ, μ) інваріантних торів лінійних, квазілінійних і нелінійних систем, визначених на нескінченновимірних торах, з параметром μ, який належить простору обмежених послідовностей дійсних чисел, та незалежними відхиленнями дискретного аргументу;

— побудовано п'ять нетривіальних ілюстративних прикладів.

Теореми, що доведенні у даній роботі, стосуються диференційовності інваріантних торів різницевих систем, визначених на нескінченновимірних торах, та не мають аналогу у створеній на цей час теорії інваріантних торів аналогічних систем диференціальних та диференціально-різницевих рівнянь. Оскільки різницеві рівняння становлять дискретний аналог диференціальних, то одержані результати можуть знайти практичне застосування в розв'язуванні різноманітних задач з теорії нелінійних коливань, математичної та теоретичної фізики.

 ISBN 978-3-949059-50-6