KAPITEL 4 / CHAPTER 4 [4]
METHODS OF NUMERICAL INTEGRATION

DOI: 10.30890/2709-2313.2022-10-02-008

Вступ

При розв’язуванні широкого кола математичних, інженерних, фізичних задач виникає потреба в обчисленні визначених інтегралів, але лише в небагатьох випадках для їх обчислення можна скористатися відомою функцією Ньютона-Лейбніца оскільки клас функцій, первісна яких виражається через елементарні функції, є дуже вузьким.

Крім цього, цією формулою важко і навіть практично неможливо скористатися тоді, коли підінтегральну функцію задано таблично або графічно і її аналітичний вираз невідомий а саме поняття первісної втрачає зміст а також, коли аналітичний вираз первісної досить складний і незручний для обчислень.

У цих випадках треба використовувати чисельні методи і будувати формули для наближеного обчислення визначених інтегралів.

Обчислення визначеного інтегралу застосовується в самих різноманітних задачах науки і техніки, далеко не вичерпний перелік яких наведено нижче:

– обчислення довжини дуги кривої, площ плоских фігур, площ поверхні та об’ємів тіл (в тому числі і тіл обертання), маси витисненої рідини;
– обчислення статичних моментів і центра ваги кривої;
– обчислення довжини пройденого шляху при прямолінійному русі за відомою швидкістю $v(t)$ протягом часу від моменту t_1 до t_2;
– обчислення кількості продукції виготовленої за проміжок часу $(t_0; t_1)$ при заданій залежності продуктивності праці від часу $a(t)$;
– подання коефіцієнтів тригонометричного ряду за формулами Фур’є;
– обробка результатів чисельного експерименту для збільшення їх точності і надійності;
– визначення переміщень в пружній системі (теоретична механіка) за допомогою множення епюр (інтеграл Мора).

Завдяки розвитку комп’ютерної техніки та програмування чисельні методи взагалі та методи чисельного інтегрування зокрема сьогодні стали ефективним інструментом розв’язання широкого кола задач у самих різноманітних сферах науки і техніки.

4.1. Класифікація та аналіз методів чисельного інтегрування.

Методам чисельного інтегрування присвячена велика кількість публікацій – монографій, підручників та навчально-методичних посібників, далеко не повний перелік яких наведений в списку використаних джерел.

Фундаментальні основи чисельного інтегрування детально розглянуті в

[4]*Authors: Yarovenko Anatolii Grygorovych*

працях [1-13], які, не зважаючи на рік видання, залишаються актуальними і сьогодні. Результати опрацювання та аналізу саме цих праць стали основою всіх досліджень, виконаних автором, і саме на ці праці неявно посилається автор в подальшому викладенні матеріалу свого дослідження.

Явні посилання використовуються тільки в окремих випадках для акцентування на оригінальність чи особливість авторського подання матеріалу (викладок) методів чисельного інтегрування в тій чи іншій праці з [2-13].

Праці [14-28] є найновішими з доступних (в основному вітчизняних) навчальних та навчально-методичних посібників з чисельних методів взагалі та, зокрема, чисельного інтегрування і містять, крім теоретичного, багатий методичний матеріал – методичні вказівки та рекомендації щодо застосування на практиці методів чисельного інтегрування для розв’язання конкретних задач та прикладів. Вони також були ретельно досліджені та проаналізовані в процесі виконання цієї роботи.

Окремо слід відзначити роботу [29], яка містить огляд результатів наукових досліджень з теорії квадратур дніпровської школи і наукового семінару під керівництвом акад. М.П. Корнійчука і налічує 59 джерел.

Роботи [30-35] є найновішими публікаціями з даної теми і свідчать про продовження наукових досліджень в цьому напрямку, а отже підтверджують актуальність теми. На жаль до списку використаних джерел неможливо було включити велику кількість підручників та посібників з вищої математики та математичного аналізу, в яких розглядаються основи методів чисельного інтегрування (розділ «Інтегральне числення»).

4.1.1 Основні поняття та визначення.

Інтеграл – центральне поняття інтегрального числення, узагальнення поняття суми для функції, визначеній на континуумі. У всіх підручниках з вищої математики та математичного аналізу для вищої школі розглядається це поняття, але здебільшого як просте означення. І.П. Песін в своїй фундаментальній праці «Развитие понятия интеграла», виданій в далекому 1966 році, дослідив не тільки виникнення і становлення поняття інтеграла в XVII ст., різні означення цього поняття, введені видатними математиками, але й розвинення поняття інтеграла аж до XX ст. включно [1].

Означення, дане Коші, прийнято вважати першим означенням інтеграла, яке відповідає сучасним вимогам строгості [1, с.13].

Припускаючи, що $f(x)$ – неперервана функція на сегменті $[a, b]$, Коші розглядає інтегральну суму

$$S(\sigma) = f(x_0)(x_1 - x_0) + \cdots + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}), \qquad (1.1)$$

де $\sigma = \{x_i\}_0^n$ – розбиття сегмента $[a, b]$. Коші стверджує, що коли діаметр розбиття $d(\sigma) \to 0$ суми S мають границю, яка він називає визначеним інтегралом $\int_a^b f(x)dx$ і доводить існування цієї границі.

За умови, що функція $f(x)$ неперервна та обмежена на сегменті $[a, b]$ має місце формула

 ISBN 978-3-949059-53-7

$$\lim_{\substack{\xi_1 \to a \\ \xi_2 \to b}} \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx, \ \ a < \xi_1 < \xi_2 < b, \qquad (1.2)$$

за якою Коші пропонує визначати інтеграл $\int_a^b f(x)dx$.

В 1854 р. Бернгард Ріман дав означення інтегралу, але без припущення неперервності функції $f(x)$ на сегменті $[a, b]$, та визначив необхідні та достатні умови інтегровності функції [1, c.17].

Б. Ріман стверджує, що для того, щоб функція $f(x)$ була інтегрованою в сегменті $[a, b]$, необхідно і достатньо, щоб сума $\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta_i$, де ω_i – коливання функції в сегменті $\Delta = [x_{i-1}, x_i]$, прямувала до нуля разом з діаметром розбиття $d(\sigma)$.

Для функції однієї змінної $f(x)$, визначеній на сегменті $[a, b]$ та певного розбиття $\sigma = \{x_i\}_0^n$ цього сегменту на відрізки $[x_i, x_{i+1}]$ інтегральна сума визнається як

$$S(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (1.3)$$

де $x_i \le \ \xi_i \le x_{i+1}$ – будь-яка точка з відрізку.

Якщо границя такої суми для довільного розбиття $\sigma = \{x_i\}_0^n$ і довільного вибору точок ξ_i існує при $d(\sigma) \to 0$ (прямуванні найбільшої довжини відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ до нуля), то функція $f(x)$ називається інтегрованою, а границя інтегральної суми називається інтегралом Рімана функції на сегменті $[a, b]$ і позначається

$$I = \int_a^b f(x)dx \qquad (1.4)$$

У цьому випадку функція $f(x)$ називається інтегрованою за Ріманом на $[a, b]$, в протилежному випадку $f(x)$ є неінтегрованою за Ріманом на відрізку $[a, b]$.

Функція *f* називається підінтегральною функцією, *f(x)dx* – підінтегральним виразом, *x* – змінною інтегрування, числа *a* та *b* – нижньою та верхньою межами інтегрування відповідно. Множину інтегрованих за Ріманом функцій на відрізку $[a, b]$ позначають $R([a, b])$.

Необхідно відзначити, що в інтегральній сумі Рімана (1.3) значення функції вибирається в довільній точці відрізка $[x_i, x_{i+1}]$, в той час як Коші в (1.1) фігурують значення функції в лівих кінцях відрізків розбиття.

Інтеграл Рімана можна також визначити як границю сум Дарбу.

Нижня та верхня суми Дарбу для функції $f(x)$ та розбиття σ – це інтегральні суми, в яких відповідні точки ξ_i обираються як точні нижня та верхня межі функції $f(x)$ відповідно.

Інтегральна сума для розбиття σ, для якої відповідні точки ξ_i вибираються з умови $\xi_i = \ inf_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)$ називається нижньою сумою Дарбу для функції $f(x)$ та розбиття σ і позначається одним із символів $L(f, \ \sigma)$ (від англ. *Lower* –

«нижній») або $s\,(f,\sigma)$.

Інтегральна сума для розбиття σ, для якої відповідні точки ξ_i вибираються з умови $\xi_i = sup_{[x_i, x_{i+1}]}\, f(x)$), називається верхньою сумою Дарбу для функції f та розбиття σ і позначається одним із символів $U(f, \lambda)$ (від англ. *Upper* – «верхній») або $S\,(f, \lambda)$.

За допомогою верхньої та нижньої сум Дарбу можна дати критерій інтегрованості функції за Ріманом.

Теорема 1. Нехай f: $[a,b] \to R$ – обмежена функція. Функція $f \in R([a,b])$ тоді і лише тоді, коли

$$\lim_{d(\sigma)\to 0}\big(S(f,\sigma) - s(f,\sigma)\big) = 0$$

Наступні теореми визначають класи інтегрованих за Ріманом функцій.

Теорема 2. Про інтегрованість неперервної функції. $C([a,b]) \subset R([a,b])$, тобто кожна неперервна на відрізку $[a,b]$ функція є інтегровною за Ріманом на цьому відрізку.

Теорема 3. Про інтегрованість монотонної функції. Кожна монотонна на відрізку $[a,b]$ функція є інтегровною за Ріманом на цьому відрізку.

Теорема 4. Про інтегрованість функції зі скінченною кількістю точок розриву). Нехай f : $[a,b] \to R$ задовольняє умовам:

1. функція $f(x)$ обмежена на $[a,b]$;
2. $f \in C([a,b]) \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$).

Тоді $f \in R([a,b])$.

Подальші узагальнення поняття інтегралу дозволяють розширити його на кратні, поверхневі, об'ємні інтеграли, а також на інтеграли на об'єктах ширшої природи з мірою, включаючи функції, для яких границі інтегральних сум не існує. На сьогодні існує багато різновидів визначених інтегралів крім інтегралів Коші, Рімана та Дарбу: інтеграл Лебега, інтеграл Стілтьєса, інтеграл Бохнера, інтеграл Даніелла, інтеграл Борвайна, інтеграл Данжуа-Хінчина, інтеграл Перрона, інтеграл Юнга та інші.

Основне досягнення в області інтегрування відбулося в XVII-му столітті із відкриттям фундаментальної теореми інтегрального числення (відомої як формула Ньютона–Лейбніца) Ньютоном і Лейбніцем, незалежно один від одного.

Нехай функція $f(x)$ визначена і диференційована на відрізку $[a,b]$ і її похідна в кожній точці $[a,b]$ дорівнює $F(x)$. Тоді функція $F(x)$ називається первісною функції $f(x)$ та записується як: $F'(x) = f(x)$.

Так як $(F'(x) + C)' = F'(x) = f(x)$ для будь-якої константи С, то можна говорити про множину первісних – множину функцій виду $F(x) + C$. Множина первісних $F(x) + C$ функції $f(x)$ називається невизначеним інтегралом функції $f(x)$ і позначається $\int f(x)dx$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,\ \ x \in [a,b] \tag{1.5}$$

Справедливі наступні теореми.

Теорема 5. Для будь-якої неперервної на відрізку $[a, b]$ функції $f(x)$ існує на цьому відрізку первісна, а отже існує невизначений інтеграл.

Теорема Ньютона-Лейбніца. Якщо $F(x)$ – деяка первісна від неперервної функції $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{1.6}$$

Ця формула називається формулою Ньютона-Лейбніца. Іноді її називають основною формулою інтегрального числення. Для скорочення запису часто застосовується позначення:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(x)\,|_a^b$$

Формула Ньютона-Лейбніца (1.6) визначає загальний підхід до обчислення визначеного інтегралу і є узагальненням методу Архімеда для обчислення площ і поверхонь плоских, криволінійних поверхонь, об'ємів тіл, довжин кривих та інших задач.

Обчислення визначеного інтегралу застосовується в самих різноманітних задачах науки і техніки, далеко не вичерпний перелік яких наведено нижче:

- обчислення довжини дуги кривої, площ плоских фігур, площ поверхні та об’ємів тіл (в тому числі і тіл обертання);
- обчислення статичних моментів і центра ваги кривої;
- обчислення довжини пройденого шляху при прямолінійному русі за відомою швидкістю $v(t)$ протягом часу від моменту t_1 до t_2;
- обчислення кількості продукції виготовленої за проміжок часу $(t_0; t_1)$ при заданій залежності продуктивності праці від часу $a(t)$;
- подання коефіцієнтів тригонометричного ряду за формулами Фур’є;
- обчислення маси витисненої рідини;
- обробка результатів чисельного експерименту для збільшення їх точності і надійності;
- визначення переміщень в пружній системі (теоретична механіка) за допомогою множення епюр (інтеграл Мора).

4.1.2 Основні методи чисельного інтегрування.

Задачу обчислення визначеного інтегралу

$$I = \int_a^b f(x)dx \tag{1.7}$$

Девід Каханер назвав однією з двох фундаментальних задач математичного аналізу [5, 166].

Якщо функція $f(x)$ є неперервною на сегменті $[a, b]$ і відома її первісна $F(x)$, то для обчислення визначеного інтегралу (1.4) можна використати формулу Ньютона-Лейбніца (1.6).

Однак ця формула мало придатна для практики, бо клас функцій $f(x)$,

 ISBN 978-3-949059-53-7

первісна яких виражається через елементарні функції є дуже вузьким [13, с.243]. Наприклад, для інтегралів $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$, $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$, первісну F не можна виразити в елементарних функціях.

Крім цього, цією формулою важко і навіть практично неможливо скористатися тоді, коли підінтегральну функцію f задано таблично або графічно і її аналітичний вираз невідомий, а саме поняття первісної втрачає зміст, а також, коли аналітичний вираз первісної F досить складний і незручний для обчислень [12, с.221].

В таких випадках треба використовувати методи чисельного інтегрування – методи обчислення (як правило, наближеного) визначених інтегралів. Особливо важливе значення мають методи чисельного інтегрування функцій, в яких для знаходження наближеного значення визначеного інтеграла використовуються значення підінтегральної функції та її похідних у скінченній кількості точок, що належать переважно інтервалу інтегрування. Такі формули обчислення наближеного значення визначених інтегралів називають формулами механічних квадратур або квадратурними формулами [6, с.67].

В загальному випадку задача обчислення визначеного інтегралу формулюється наступним чином [6, с.67; 21, с.120].

Необхідно обчислити значення визначеного інтегралу

$$I = \int_a^b p(x)f(x)dx, \qquad (1.7)$$

де *p(x)* – так звана вагова функція (ваговий множник), яка вбирає в себе всі особливості функції $f(x)$ на проміжку інтегрування $[a, b]$, а функція $f(x)$ – довільна достатньо гладка функція деякого класу. Без обмеження загальності але для спрощення викладення надалі будемо вважати $p(x) \equiv 1$.

Основна ідея більшості методів чисельного інтегрування базується на використанні геометричного змісту визначеного інтегралу та закладена в самому його означенні.

Геометричний зміст визначеного інтегралу: інтеграл (1.7) чисельно рівний площі криволінійної трапеції, обмеженої кривою (підінтегральною функцією) $y = f(x)$, сегментом $[a, b]$ осі Ox (інтервалом інтегрування) та вертикальними прямими, які проходять через точки $x = a, x = b$ (рисунок 1).

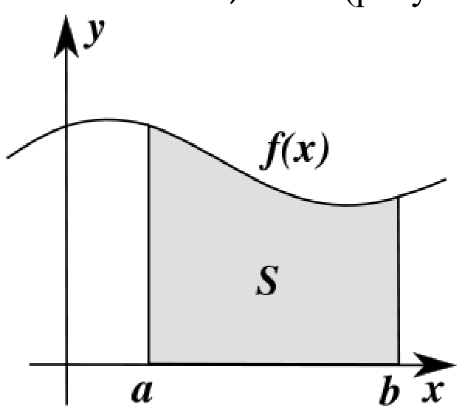


Рисунок 1 – Геометричний зміст визначеного інтегралу.

Таким чином, задача про наближене обчислення інтегралу рівносильна задачі про обчислення площі криволінійної трапеції. Але задачу про обчислення площі криволінійної трапеції можна звести до задачі обчислення суми площ криволінійних трапецій, отриманих шляхом поділу інтервалу інтегрування $[a, b]$ на рівні частини (підінтервали) (рисунок 2).

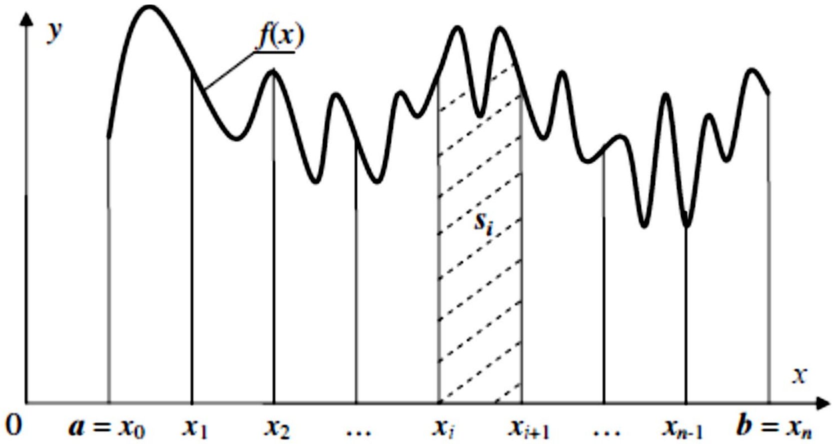


Рисунок 2 – Криволінійні трапеції для інтегрування

Тоді загальна площа криволінійної трапеції рівна

$$S = \sum_{i=1}^{n} s_i$$

Виходячи з означення Рімана визначеного інтегралу як границі інтегральної суми (1.3), за наближене значення інтегралу (1.7) можна прийняти загальну площу криволінійної трапеції:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} s_i$$

Тобто, за наближене значення інтегралу (1.7) можна прийняти скінчену суму

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i), \qquad (1.8)$$

де

$$\sigma = \{x_i\}_0^n : a \leq x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq b \qquad (1.9)$$

розбиття інтервалу інтегрування $[a, b]$ або сітка, A_i – сталі.

Формула (1.8) називається n-точковою квадратурною формулою або квадратурою, точки x_k – вузлами або абсцисами квадратурної формули, а сталі A_i – коефіцієнтами або вагами квадратурної формули [3, с.48; 5, с.170; 6, с.67; 10, с.70; 11, с.161; 12, с.222; 13, с.243; 21, с.121].

Вузли і коефіцієнти квадратурної формули не залежать від *f(x)*, але коефіцієнти залежать від вузлів.

Різниця

 ISBN 978-3-949059-53-7

$$R_n(f) = \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) \qquad (1.10)$$

називається залишковим членом або похибкою квадратурної формули.

Сума

$$\sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) \qquad (1.11)$$

називається квадратурною сумою [6, с.68] або квадратурним правилом [5, с.170].

Важливим є зауваження Девіда Каханера щодо квадратурної суми, яку він ще називає квадратурним правилом. Д. Каханер підкреслює, що квадратурна сума є узагальненням інтегральної суми Рімана (1.3), але не тотожна їй і не перетворюється в неї, навіть якщо покласти $A_i = \Delta_i$ [5 с.170]. Серед відомих і використовуваних на практиці квадратурних сум є і такі, які не є сумами Рімана.

Якщо границі a, b інтервалу інтегрування належать сітці σ ($x_0 = a$, $x_n = b$), то квадратурну формулу (1.8) називають квадратурною формулою замкненого або закритого типу, а якщо не належать ($x_0 > a$, $x_n < b$) – відкритого типу [21, с.121].

Задача чисельного інтегрування за допомогою квадратурних формул полягає в такому оптимальному виборі вузлів та коефіцієнтів, щоб похибка (1.9) була якомога меншою для всіх функцій $f(x)$ деякого широкого класу [6, с.68; 10, с.70; 21, с.121;].

Для цього підінтегральну функцію $f(x)$ заміщують деякою апроксимуючою функцією (або системою функцій) $\varphi(x)$, яка має бути достатньо близькою до $f(x)$ ($f(x) \approx \varphi(x)$) та порівняно просто інтегрувалась.

Одним з найпоширеніших методів побудови квадратурних формул є апроксимація (заміна) підінтегральної функції інтерполяційним поліномом Лагранжа.

Якщо на всьому інтервалі інтегрування [a, b] підінтегральна функція замінюється одним інтерполяційним поліномом, то квадратурна формула називається малою або простою чи канонічною [6, с.67; 9, с.42; 13, с.252; 31, с.57]. Такі формули характеризуються малою точністю (великою похибкою), тому на практиці застосовуються мало. Одним з методів підвищення точності чисельного інтегрування є розбиття інтервалу інтегрування [a, b] на підінтервали (1.9) і використання на кожному з них однієї і тієї ж малої квадратурної формули.

Тоді сума малих квадратурних формул по всіх підінтервалах розбиття називається великою або складеною чи узагальненою квадратурною формулою.

Квадратурні формули Ньютона-Котеса.

Квадратурні формули Ньютона–Котеса (Isaac Newton, Roger Cotes) будуються на основі інтерполяції поліномом степені n (відомо, що існує єдиний поліном степені $\leq n$, який проходить через n+1 точку) підінтегральної функції по рівномірній сітці з n+1 вузлами, включаючи кінці інтервалу інтегрування.

Нехай треба обчислити інтеграл (1.7).

Задамо на інтервалі інтегрування [*a, b*] рівномірне розбиття за формулою (1.9)

$$\sigma = \{x_i\}_0^n : a \le x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_n \le b$$

з кроком *h*=(*b*-*a*)/*n*. і замінимо підінтегральну функцію інтерполяційним поліномом Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_n)} \qquad (1.12)$$

Оскільки система вузлів інтерполювання співпадає з точками розбиття (1.9) інтервалу [*a, b*] з кроком *h*, то заміна змінної $x = x_0 + qh$ трансформує многочлен Лагранжа (1.2) таким чином:

$$L_n(x) = L_n(x_0+qh) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!} \cdot \frac{q^{[n+1]}}{q-i}, \qquad (1.13)$$

де $q^{[n+1]} = q(q-1)\ldots(q-n)$.

Тоді коефіцієнти A_i з (1.8) визначаються за формулою:

$$A_i = \int_{x_0}^{x_n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!} \cdot \frac{q^{[n+1]}}{q-i}\,dx \qquad (1.14)$$

Оскільки $q=(x-x_0)/h$, то $dq= dx/h$. Зробивши заміну змінних у визначеному інтегралі (1.14), отримаємо:

$$A_i = h\frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!}\int_0^n \frac{q^{[n+1]}}{q-i}\,dq \qquad (1.15)$$

Квадратурну формулу (1.8) можна переписати у вигляді:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx I_h = (b-a)\sum_{i=0}^{n} H_i f(x_i), \qquad (1.16)$$

де

$$H_i = \frac{1}{n}\frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!}\int_0^n \frac{q^{[n+1]}}{q-i}\,dq \qquad (1.17)$$

сталі, що називаються коефіцієнтами Котеса.

Формули (1.16)–(1.17) визначають сімейство квадратурних формул Ньютона–Котеса. Параметром цього сімейства є число *n* – степінь інтерполяційного многочлена, яким замінюється підінтегральна функція.

На практиці найчастіше використовуються формули Ньютона–Котеса при *n*=0, 1, 2, 3. Ці формули відповідно мають назви: формула прямокутників, формула трапецій, формула Сімпсона (парабол), формула 3/8 (Ньютона).

Формула прямокутників.

Поклавши в (1.16)–(1.17) *n*=0, отримаємо малу квадратурну формулу прямокутників:

$$I \approx I^{\Pi} = (b-a)f(\frac{a+b}{2})$$

ISBN 978-3-949059-53-7

Застосувавши цю формулу на кожному підінтервалі розбиття інтервалу інтегрування $[a, b]$ з кроком $h=(b-a)/n$, в силу адитивності інтегралу отримаємо велику (складену) квадратурну формулу середніх (або центральних) прямокутників :

$$I_h^{\Pi} = h\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) \tag{1.18}$$

з оцінкою залишкового члена

$$R_h^{\Pi}(f) = \mathrm{M}_2\frac{(b-a)h^2}{24} = \mathrm{M}_2\frac{(b-a)^3}{24n^2}$$

де $M_2 = max|f''(\xi)|,\ \ \xi \in [a,b]$.

Якщо де ξ – довільна точка на $[a,b]$ і $\xi = a$, тобто вибираємо в якості $const$ значення функції на лівому кінці інтервалу $[a,b]$, то одержимо формулу лівих прямокутників:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f(a)dx = (b-a)f(a) \tag{1.19}$$

Якщо $\xi = b$, то одержимо формулу правих прямокутників:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f(b)dx = (b-a)f(b) \tag{1.20}$$

Якщо за ξ вибрати середню точку $[a,b]$, то одержимо формулу середніх (центральних) прямокутників:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f(b)dx = (b-a)f(\tfrac{a+b}{2}) \tag{1.21}$$

Формула трапецій.

Якщо у визначеному інтегралі $\int_a^b f(x)dx$ функцію $f(x)$ замінити лінійною функцією

$$y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

графік, якої проходить через точки $A(a;f(a))$ і $B(b;f(b))$ (рисунок 3), то отримаємо наближену рівність:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b (f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a})dx =$$

$$= \frac{(b-a)}{2}\big(f(b)+f(a)\big), \tag{1.22}$$

яка називається формулою трапецій.

Саме за наближене значення площі криволінійної трапеції $aABb$, ми приймаємо площу звичайної трапеції $aABb$.

Цю ж формулу для малої квадратурної формули трапецій отримаємо поклавши в (1.16)–(1.17) n=1:

$$I^T = \frac{(b-a)}{2}\big(f(b)+f(a)\big).$$

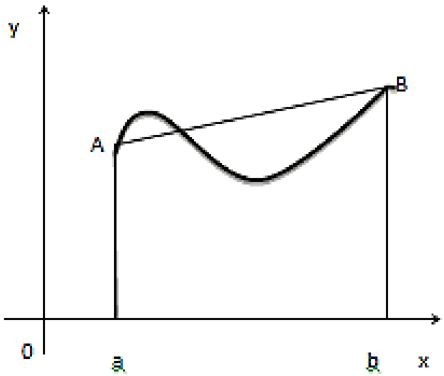


Рисунок 3 – Заміна криволінійної трапеції

Велика квадратурна формула трапецій має вигляд:

$$I_h^T = \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right), \qquad (1.23)$$

з оцінкою залишкового члена

$$R_h^T(f) = \mathrm{M}_2 \frac{(b-a)h^2}{12} = \mathrm{M}_2 \frac{(b-a)^3}{12n^2},$$

де $M_2 = max|f''(\xi)|, \ \ \xi \in [a, b]$.

Геометрична ілюстрація методу трапецій для випадку великої квадратурної формули подана на рисунку 4.

Формула Сімпсона.

Квадратурна формула Сімпсона (парабол) вперше була отримана Кавальєрі в 1639 році, а пізніше Джеймсом Грегорі в 1668 р. та Томасом Сімпсоном в 1743 році [5, с.175].

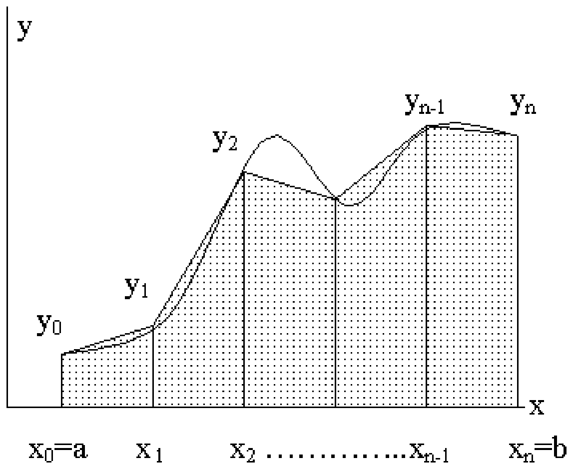


Рисунок 4 – Метод трапецій

Якщо у визначеному інтегралі $\int_a^b f(x)dx$ замість функції $f(x)$ взяти тричлен $y = ax^2 + \beta x + \gamma$, графік якого проходить через три точки: $A(a; f(a)), B\left(\frac{a+b}{2}; f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right), C(b; f(b))$ (рисунок 5), то дістанемо наближену рівність:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)dx = \left(\alpha\frac{x^3}{3} + \beta\frac{x^2}{2} + \gamma x\right)\Big|_a^b =$$
$$= \tfrac{b-a}{6}(2\alpha(b^2 - a^2) + 3\beta(b-a) + 6\gamma) \qquad (1.24)$$

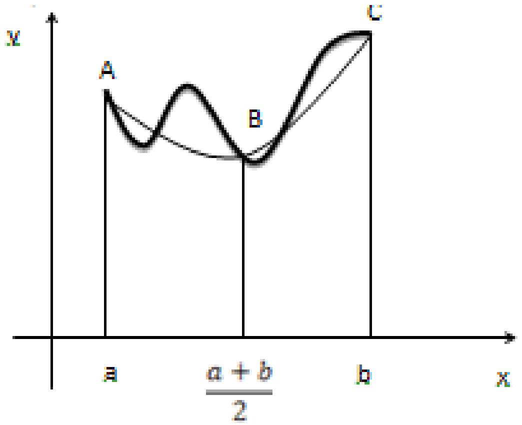


Рисунок 5 – Заміна криволінійної трапеції параболою

Оскільки графік квадратного тричлена $y = ax^2 + \beta x + \gamma$ проходить через точки A, B, і C, то коефіцієнти α, β, γ цього тричлена задовольняють рівняння:

$$\left\{\begin{matrix} ax^2 + \beta x + \gamma = f(a), \\ a(\frac{a+b}{2})^2 + \beta\frac{a+b}{2} + \gamma = f(\frac{a+b}{2}) \\ ax^2 + \beta x + \gamma = f(b). \end{matrix}\right\}$$

Використовуючи ці рівняння, вираз, що стоїть у правій частині формули (7), можна замінити рівним йому виразом:

$$\frac{b-a}{6}(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)).$$

Після цього формулу (1.24) перепишемо у вигляді

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right). \qquad (1.25)$$

Ця формула називається формулою Сімпсона або парабол.

Тут за наближене значення площі криволінійної трапеції $aABCb$ (рисунок 5) ми прийняли площу другої криволінійної трапеції, яка відрізняється від першої тільки тим, що зверху вона обмежена не графіком функції $y = f(x)$, а параболою $y = ax^2 + \beta x + \gamma$, яка проходить через точки $A(a; f(a)), B\left(\frac{a+b}{2}; f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right), C(b; f(b))$, що лежать на кривій $y = f(x)$.

Поклавши в (1.16)–(1.17) *n*=2, отримаємо цю ж малу квадратурну формулу Сімпсона:

$$I^C = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

 ISBN 978-3-949059-53-7

та велику квадратурну формулу Сімпсона:

$$I_h^C = \frac{b-a}{6m}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1})\right) \qquad (1.26)$$

з оцінкою залишкового члена (для $h=(b-a)/2m$)

$$R(f) = \mathrm{M}_4 \frac{(b-a)h^4}{180} = \mathrm{M}_4 \frac{(b-a)^5}{2880m^4},$$

де $M_4 = max\left|f^{(4)}(\xi)\right|,\ \ \xi \in [a,b]$.

4.1.3. Аналіз похибок квадратурних формул.

За допомогою квадратурних формул визначений інтеграл обчислюється наближено, тобто

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx I^* + \Delta,$$

де I^* – наближене значення інтегралу, а Δ – загальна похибка чисельного інтегрування, яка складається з декілька видів похибок.

В загальному випадку $\Delta=\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3$ де:

– Δ_1 – похибка заокруглення (*Round-off error*), яка виникає через неможливість точно представити всі дійсні числа в комп’ютерах із обмеженою пам'яттю (обмеженням кількості десяткових розрядів числа);
– Δ_2 – неусувна похибка, яка виникає через похибки вихідних даних, значення яких використовуються в обчисленнях;
– Δ_3 – похибка методу (похибка відсікання, *Truncation error*), яка породжується вибраним методом наближеного розв'язання задачі.

Відомо, що чисельне інтегрування стійке за вхідними даними, хоча квадратурні формули нестійкі відносно похибок округлення, але ця нестійкість слабка і виявляється лише за розрахунків з малою кількістю вірних цифр.

Таким чином, основною похибкою чисельного інтегрування є похибка вибраного методу (квадратурної формули). Обчисливши або оцінивши значення залишкового члена квадратурної формули, отримаємо апріорну оцінку похибки квадратурної формули до початку розв’язання задачі.

Малі квадратурні формули використовують фіксовані точки інтервалу інтегрування (кінці та середину) та мають низький порядок точності: 0 – методи правих та лівих прямокутників, 1 – методи середніх прямокутників і трапецій, 3 – метод парабол (Сімпсона).

При використанні формул простих квадратур немає можливості керувати точністю обчислень (впливати на величину похибки).

З формул залишкових членів квадратурних формул слідує, що похибка формул лівих і правих прямокутників є величиною порядку $O(h)$. Похибки квадратурних формул середніх прямокутників і трапецій є величиною порядку $O(h^2)$, а похибка квадратурних формул Сімпсона та 3/8 (Ньютона) мають порядок $O(h^4)$.

Оскільки інтерполяційний поліном степеня n для функції, яка сама є поліномом степеня n, співпадає з цією функцією в силу теореми єдиності інтерполяційного поліному, то квадратурні формули прямокутників, трапецій та

Сімпсона є точними для поліномів нульового, першого та другого степеня відповідно.

Має місце більш сильне **твердження**: квадратурна формула прямокутників є точною для поліномів першого степеня, а квадратурна формула Сімпсона є точною для поліномів третього степеня.

Квадратурна формула Ньютона

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3)$$

як і формула Сімпсона має похибку порядку $O(h^5)$.

Найбільш поширеними методами збільшення точності (зменшення похибки) чисельного інтегрування є [2, с.86]:

– розбиття інтервалу інтегрування на частини і побудова складених (великих) квадратурних формул;
– підвищення порядку точності квадратур (тобто підвищення степені поліномів, для яких квадратури точні);
– зведення інтегралів від функцій з особливостями до інтегралів від більш гладких функцій.

4.2. Чисельне інтегрування із заданою точністю

Ні квадратурні формули Ньютона-Котеса, ні квадратурні формули найвищої алгебраїчної міри точності (квадратури Гауса, Веддля, 3/8 Ньютона, Буля, Лобатто, Ейлера-Маклорена), в тому числі, які базуються на використанні ортогональних багаточленів (багаточлени Якобі, Лежандра, Ерміта, Лагера, Чебишева та інші) не дають розв’язку задачі обчислення визначеного інтегралу з наперед заданою точністю. Це пов’язано з тим, що у більшості випадків оцінити залишковий член квадратурної формули дуже важко або й неможливо, наприклад тоді, коли функцію задано графічно або таблично і аналітичний вираз її невідомий, або коли функцію задано складним аналітичним виразом і її похідні важко оцінити.

Але саме залишковий член квадратурної формули є апріорною оцінкою її похибки.

У зв'язку з цим широкого застосування набули методи апостеріорної оцінки похибки обчислення визначеного інтегралу і її використання для подальшого уточнення наближеного значення цього інтегралу. Найбільш поширеними є методи Карла Рунге (1856–1927), Льюіса Фрая Річардсона (1881–1953) та Вернера Ромберга (1909–2003).

З використанням цих методів алгоритм обчислення визначеного інтегралу є наступним:

1. Обчислення наближеного значення визначеного інтегралу за вибраною квадратурною формулою.
2. Апостеріорна оцінки похибки.

ISBN 978-3-949059-53-7

3. Керування продовженням обчислень – уточнення наближеного значення інтегралу або припинення обчислень за умови досягнення заданої точності.

4.2.1 Метод Рунге оцінки похибки методу чисельного інтегрування.

Метод Рунге апостеріорного оцінювання похибки обчислення визначеного інтегралу називають правилом (принципом) Рунге або методом подвійного (повторного) перерахунку [2, с.144; 12, с.234; 31, с.63].

Правило Рунге дозволяє отримати апостеріорну оцінку похибки обчислення визначеного інтегралу і використати її для подальшого уточнення наближеного значення цього інтегралу, тобто отримати більш високий порядок точності обчислень.

Суть правила Рунге викладемо наступним чином.

Нехай для обчислення величини *z(x)* використовується формула

$$z(x) \approx \eta(x,h)\ , \tag{2.1}$$

де $\eta(x,h)$ – наближене значення функції *z(x)*, яке залежить від деякого параметра h. І нехай формула (2.1) має p-й порядок точності, тобто має місце асимптотичне розкладання

$$z(x) = \eta(x,h) + \psi(x)h^p + O(h^p) \text{ при } h \to 0 \tag{2.2}$$

Введемо величину $r \in (0;1)$. Заміною $h \to rh$ з (2.2) отримаємо

$$z(x) = \eta(x,rh) + \psi(x)(rh)^p + O(h^p) \text{ при } h \to 0 \tag{2.3}$$

При цьому враховано, що $o((rh)^p) = O(h^p)$ при $h \to 0$.

Віднімемо від (2.2) рівність (2.3) почлено:

$$0 = \eta(x,h) - \eta(x,rh) + \psi(x)h^p(1-r^p) + O(h^p) \text{ при } h \to 0 \tag{2.4}$$

Тут враховано, що $O(h^p) - O(h^p) = O(h^p)$ при $h \to 0$.

З (2.4) отримаємо

$$\eta(x,rh) - \eta(x,h) = \psi(x)h^p(1-r^p) + O(h^p) \approx \psi(x)h^p(1-r^p) \tag{2.5}$$

Звідси отримуємо першу формулу Рунге:

$$\psi(x)h^p = \frac{\eta(x,rh)-\eta(x,h)}{1-r^p} + O(h^p) \approx \frac{\eta(x,rh)-\eta(x,h)}{1-r^p} \tag{2.6}$$

При її виведені враховано, що

$$\frac{1}{1-r^p}O(h^p) = O(h^p) \text{ при } h \to 0$$

Перша формула Рунге дозволяє отримати асимптотичну оцінку похибки наближеного значення $\eta(x,rh)$:

$$\begin{aligned}|z(x) - \eta(x,rh)| &= |\psi(x)(rh)^p + o(h^p)| \approx |\psi(x)(h)^p|r^p = \\ &= r^p\frac{|\eta(x,rh)-\eta(x,h)|}{1-r^p} = \frac{|\eta(x,rh)-\eta(x,h)|}{\left(\frac{1}{r}\right)^p - 1}\end{aligned} \tag{2.7}$$

Цю формулу використовують для отримання наближеного значення $z(x)$ з похибкою, не більшою заданого додатного числа ε. Це робиться з використанням методу повторного перерахунку (правило Рунге). Суть його полягає в тому, що задається послідовність значень параметра h, яка є спадною геометричною прогресією

$$h_0, h_1 = rh_0, h_2 = rh_1, h_3 = rh_2, \ldots \tag{2.8}$$

 ISBN 978-3-949059-53-7

Тут r – деяке фіксоване число з інтервалу (0;1). Частіше всього вибирається значення r=1/2.

Очевидно, що $h_n \to 0$ при $n \to \infty$, отже $\eta(x, h_n) \to z(x)$ при $n \to \infty$. Далі послідовно обчислюються наближені значення $\eta(x, h_n)$ при n = 0, 1, 2, … і для кожного n перевіряється виконання нерівності

$$\frac{|\eta(x, rh) - \eta(x, h)|}{\left(\frac{1}{r}\right)^p - 1} \leq \varepsilon \tag{2.9}$$

При достатньо великому значенні n ця нерівність буде виконуватись і ми отримаємо наближене значення $\eta(x, h_n)$ з похибкою

$$|z(x) - \eta(x, rh)| \approx \frac{|\eta(x, h_n) - \eta(x, h_{n-1})|}{\left(\frac{1}{r}\right)^p - 1}$$

яка не перевищує заданого числа ε.

Слід відзначити, що для застосування правила Рунге достатньо знати тільки порядок p точності наближеної формули.

Підставивши в (2.2) першу формулу Рунге (2.6), отримаємо другу формулу Рунге:

$$z(x) = \eta(x, h) + \frac{\eta(x, rh) - \eta(x, h)}{1 - r^p} + O(h^p) \text{ при } h \to 0 \tag{2.10}$$

Виберемо нове наближене значення $z(x)$ за формулою:

$$\eta_1(x, h) = \eta(x, h) + \frac{\eta(x, rh) - \eta(x, h)}{1 - r^p} \tag{2.11}$$

З (2.10) слідує, що

$$z(x) = \eta_1(x, h) + O(h^p) \text{ при } h \to 0 \tag{2.12}$$

Це означає, що наближена формула $z(x) \approx \eta_1(x, h)$ буде мати порядок точності більший p. Якщо асимптотичне розкладання (2.2) можна продовжити, тобто, коли можливе більш довге розкладання

$$z(x) = \eta(x, h) + \psi(x)h^p + \overline{\psi(x)}h^{p+1} + O(h^{p+1}) \text{ при } h \to 0\,, \tag{2.13}$$

то замість (2.12) отримаємо розкладання

$$z(x) = \eta_1(x, h) + \overline{\psi(x)}h^{p+1} + O(h^{p+1}), \tag{2.14}$$

звідки слідує, що нова наближена формула буде мати порядок точності, рівний (p+1).

Отже, друга формула Рунге дозволяє на основі відомої наближеної формули з відомим порядком точності отримати нову наближену формулу вищого порядку точності.

Слід відзначити, що формулу (2.11) можна застосовувати багатократно.

Наприклад, на основі отриманої наближеної формули $z(x) \approx \eta_1(x, h)$, яка має порядок точності (p+1), можна отримати формулу $z(x) \approx \eta_2(x, h)$ з новою правою частиною

$$\eta_2(x, h) = \eta_1(x, h) + \frac{\eta_1(x, rh) - \eta_1(x, h)}{1 - r^{p+1}} \tag{2.15}$$

Якщо асимптотичне розкладання (2.2) можна продовжувати далі, то нова наближена формула $z(x) \approx \eta_2(x, h)$ буде мати порядок точності рівний (p+2).

 ISBN 978-3-949059-53-7

Таким чином, ідея методу Рунге полягає в тому, щоб організувати обчислення значення інтеграла на декількох множинах вузлів а потім порівнявши результати обчислень, отримати оцінку похибки і прийняти рішення щодо продовження чи припинення обчислень.

Найпоширеніше обчислення інтеграла двічі – з кроками h та $h/2$ відповідно з кількістю вузлів n та $2n$.

Якщо $I = \int_a^b f(x)dx$ – точне значення інтеграла, I_h – його наближене значення, обчислене з кроком h, а $I_{h/2}$ – його наближене значення, обчислене з кроком $h/2$, і похибки (залишкові члени) кожної квадратурної формули із кроком h і $h/2$ можна записати відповідно у вигляді

$$R_h = Ch^p, \;\; R_h = C\left(\frac{h}{2}\right)^p,$$

де p – порядок точності формул, а константа $C \neq 0$ і не залежить від h, то

$$I_{h/2} - I_h = C\left(\frac{h}{2}\right)^p - Ch^p = C\left(\frac{h}{2}\right)^p (2^p - 1) \qquad (2.16)$$

Таким чином, отримали апостеріорну оцінку похибки за першою формулою Рунге (2.6):

$$|R_{h/2}| = \frac{|I_{h/2} - I_h|}{2^p - 1} \qquad (2.17)$$

Крім оцінки похибки за правилом Рунге (формули (2.6) та (2.17)) можна також уточнити наближене значення інтеграла за другою формулою Рунге (2.10):

$$I^* = I_{h/2} + R_{h/2} = \frac{2^p I_{h/2} - I_h}{2^p - 1} \qquad (2.18)$$

Формулу (2.18) називають формулою екстраполяції за Річардсоном, а отримане значення інтеграла I^* – уточненим (або екстрапольованим) за Річардсоном значенням обчислювального інтеграла.

Похибка уточненого значення обчислювального інтеграла має вищий порядок точності відносно h і рівна (p+1).

Відзначимо, що для формул прямокутників і трапецій $|R_{h/2}| = \frac{|I_{h/2} - I_h|}{3}$, а для формули Сімпсона $|R_{h/2}| = \frac{|I_{h/2} - I_h|}{15}$.

На практиці для обчислення інтеграла $I = \int_a^b f(x)dx$ із заданою точністю ε вибирається початковий крок інтегрування h (n – відповідне число вузлів розбиття інтервалу $[a,b]$) і обчислюється наближене значення інтеграла I_h. Потім для вдвічі зменшеного кроку $h/2$ (відповідно вдвічі збільшеного числа вузлів $2n$) обчислюється наближене значення інтеграла $I_{h/2}$. Якщо $|R_{h/2}| \le \varepsilon$, то з точністю ε покладають $I \approx I_{h/2}$ або більш точно $I \approx I^*$. В противному випадку обчислюють значення $I_{h/4}$ і перевіряють чи $|R_{h/4}| \le \varepsilon$ і так далі.

Наприкінці відзначимо:

1. Правило Рунге можна застосовувати тільки тоді, коли похибку можна подати у виді $R_h = Ch^p$, де p – порядок точності формул, а константа $C \neq 0$ і не залежить від h. Похибка представлення залишкового члена в такому виді вважається достатньо малою.
2. Застосування правила Рунге для квадратур Гауса вимагає складних

обчислень. Тому на практиці часто використовують квадратури Гауса-Кронрода, які також дозволяють отримати апостеріорні оцінки чисельного інтегрування і реалізовані в бібліотеках багатьох відомих пакетів прикладних програм [31, с.65].

4.2.2 Екстраполяція Річардсона.

Метод екстраполяції, відомий ще як метод локальної екстраполяції, опублікований англійським математиком Льюісом Фраєм Річардсоном ще на початку XX ст. і названий в його честь. До речі, за даними Вікіпедії японський математик Катахіро Такебе (1664–1739) відкрив метод екстраполяції Річардсона на 200 років раніше самого Річардсона.

За словами Ґ. Біркхофа та Ж-К. Рота корисність методу екстраполяції Річардсона «для практичних розрахунків навряд чи можна переоцінити» (Birkhoff, Garrett; Gian-Carlo Rota Ordinary differential equations (3rd ed.). – John Wiley and sons, 1978. – ISBN 0-471-07411-X).

Метод екстраполяції Річардсона є узагальненням технології повторного перерахунку за правилом Рунге і достатньо детально описаний в науковій літературі [2, с.150; 12, с.234; 31, с.63].

Ідея цього методу полягає в багатократному зменшенні кроку інтегрування, а також в багатократному застосуванні екстраполяційної формули (2.18) для уточнення наближеного значення інтегралу. Суть технології екстраполяції Річардсона зображено на рисунку 3.

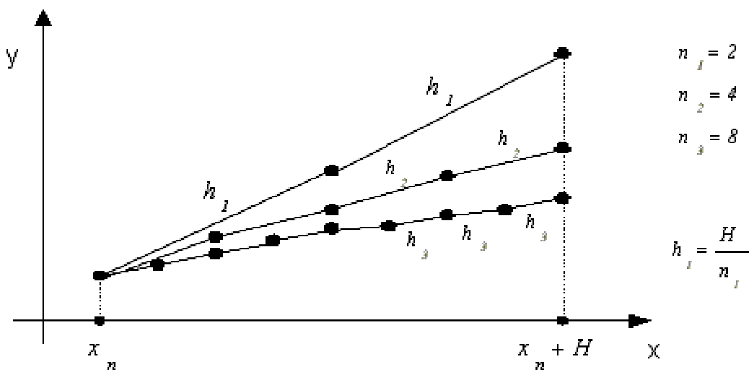


Рисунок 3 – Технологія локальної екстраполяції.

Нехай I_h – складена квадратурна формула Ньютона-Котеса з кроком h та порядком похибки p:

$$I = \int_a^b f(x)dx = I_h + Ch^p + O(h^p) \qquad (2.19)$$

Якщо відомі I_h та I_{kh}, то з (2.19) можна отримати [31, с.63]:

$$C = \frac{I_{kh} - I_h}{-((kh)^p - h^p)} \qquad (2.20)$$

Або

$$Ch^p = \frac{I_h - I_{kh}}{k^p - 1} + O(h^{p+1}) \qquad (2.21)$$

Тобто, використовуючи обчислене значення інтеграла з кроком kh, вдається

ISBN 978-3-949059-53-7

оцінити головний член похибки попереднього обчислення інтеграла з кроком h.

Тоді

$$I = I_h + \frac{I_h - I_{kh}}{k^p - 1} + O(h^{p+1}) = I_h \frac{k^p}{k^p - 1} + I_{kh} \frac{1}{k^p - 1} + O(h^{p+1}) \tag{2.21}$$

Або

$$I = \frac{k^p I_h - I_{kh}}{k^p - 1} + O(h^{p+1}) \tag{2.22}$$

Формули (2.21)-(2.22) називаються екстраполяцією Річардсона, використовуються для уточнення наближеного значення визначеного інтеграла і дозволяють отримати більш високий порядок точності обчислень.

Наприклад: Нехай є таблично задана функція:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	0	0.125	0.25	0.375	0.5	0.625	0.75	0.875	1
$f(x_i)$	0	0.021470	0.293050	0.494105	0.541341	0.516855	0.468617	0.416531	0.367879

Наближене значення інтеграла цієї функції, обчислене за формулою трапецій з кроком h=0,25, рівне $I_{0,25}$ =0,371737. Наближене значення інтеграла, обчислене за тією ж формулою трапецій з кроком h=0,125, рівне $I_{0,125}$ =366989.

Уточнюючи значення інтегралу за методом Річардсона, отримаємо:

$$I = \frac{2^2 I_h - I_{2h}}{2^2 - 1} + O(h^{p+1}) = \frac{4I_h - I_{2h}}{3} + O(h^{p+1}) = 0{,}365406$$

Якщо функцію $R(h)$ замінити інтерполяційним поліномом $P^{[j]}(h_i)$, у якого $P^{[0]} = R(h_i)$, то такий алгоритм екстраполяції називають алгоритмом Невілла.

Відомий також алгоритм раціональної екстраполяції, розроблений Буліршем і Штьором, який базується на інтерполяції раціональними функціями і використовує модифіковану квадратурну формулу прямокутників.

Слід відзначити:

1. Метод екстраполяції Річардсона застосовується не тільки для уточнення наближеного значення визначеного інтегралу, але й в алгоритмі Грэгга-Булірша-Штьора (Gragg-Bulirsch-Stoer, GBS-алгоритм) розв'язування звичайних диференціальних рівнянь та чисельних методах розв’язування задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь
2. Якщо порядок точності p наперед не відомий, то його можна оцінити, використовуючи результати обчислень I_h, I_{kh}, I_{k^2h}. Така процедура називається методом (процесом) Ейткена [31, с.64].

4.2.3 Метод Ромберга.

Метод, названий в честь Вернера Ромберга (1909-2003), який опублікував метод в 1955 році в праці «Vereinfachte numerische Integration», Det Kongelige Norske Videnskabers Selskab Forhandlinger, Trondheim, 1955, 28 (7), pp. 30–36», полягає в послідовному уточненні наближеного значення інтеграла. Цей метод застосовують коли необхідно обчистити значення визначеного інтеграла із заданою або досить високою точністю.

В основі методу Ромберга лежить обчислення інтегралу за формулою трапецій на регулярній сітці з кроком h і уточнення результату за тією ж формулою з кроком $2h$. Уточнення здійснюється шляхом застосування правила Рунге та екстраполяції Річардсона. Тому цей метод в науковій літературі часто називають методом Ромберга-Рунге-Річардсона [2, с.144, 148; 12, с.238-242; 31, с.103; 33].

Метод Ромберга-Рунге-Річардсона дозволяє отримувати більш високий порядок точності обчислень без значного збільшення числа операцій.

Нехай є результати обчислення визначеного інтеграла за квадратурною формулою трапецій на сітці з кроком h

$$I = T_h + O(h^2) \tag{2.23}$$

і на сітці х кроком kh

$$I = T_{kh} + O((kh)^2).$$

Тоді за уточнене значення інтегралу приймається

$$I = \int_a^b f(x)dx = I_h + \frac{I_h - I_{kh}}{k^2 - 1} + O(h^3) \tag{2.24}$$

Оскільки на практиці вибирається k=2, то (2.24) можна переписати у виді

$$I = \int_a^b f(x)dx = I_h + \frac{I_h - I_{kh}}{3} + O(h^3) \tag{2.25}$$

Для методу Ромберга можна використовувати рекурентну формулу.

Позначимо через

$$T(0) = \frac{h}{2}(f(b) - f(a))$$

квадратурну формулу трапецій з кроком $h=b-a$.

Потім для кожного $j \geq 1$ визначимо $T(j)=T(f,h)$ формулу трапецій з кроком $h=(b-a)/2^j$.

Тоді справедлива рекурентна формула [12, с.238]:

$$T(j) = \frac{1}{2}T(j-1) + h\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1}), \;\; j = 1,2,\ldots, \tag{2.26}$$

де $h=(b-a)/2^{j-1}$ і $x_k=a+kh$.

Рекурентна формула (2.26) використовується для програмної реалізації. Процес обчислень завершується, коли різниця двох послідовних наближень буде менше або рівна заданій точності.

Метод Ромберга зручний тим, що його можна застосовувати при довільному числі сіток і будь-якому співвідношенні їх кроків. Його недоліками є порівняно велика громіздкість та відсутність в проміжних викладках апостеріорних оцінок точності. Якщо сітки вибрані так, що згущення їх відбувається завжди в одне і те ж число разів, то замість формули Ромберга зручніше застосовувати метод Рунге [4, с.77].

4.2.4 Модифікований метод Ромберга чисельного інтегрування.

Відомо, що метод Ромберга полягає у використанні квадратурної формули трапецій та подальшого застосування правил Рунге та екстраполяції Річардсона для уточнення значення інтегралу.

Залишковий член квадратурної формули трапецій визначається за формулою

$$R_h^T(f) = \mathrm{M}_2 \frac{(b-a)h^2}{12} = \mathrm{M}_2 \frac{(b-a)^3}{12n^2}, \tag{2.27}$$

де $M_2 = max|f''(\xi)|,\ \ \xi \in [a,b]$.

А залишковий член квадратурної формули Сімпсона – за формулою

$$R(f) = \mathrm{M}_4 \frac{(b-a)h^4}{180} = \mathrm{M}_4 \frac{(b-a)^5}{2880m^4}, \tag{2.28}$$

де $M_4 = max\left|f^{(4)}(\xi)\right|,\ m = \frac{b-a}{2h}, \xi \in [a,b]$.

Звідси слідує, що похибка квадратурної формули трапецій є величиною порядку $O(h^2)$, а похибка квадратурної формули Сімпсона має порядок $O(h^4)$ або й $O(h^5)$.

Відзначимо також, що квадратурна формула трапецій є точною для поліномів першого степеня, а квадратурна формула Сімпсона – для поліномів третього степеня.

Враховуючи вищезазначене логічно очікувати, що використання квадратурної формули Сімпсона для обчислення значення інтегралу з подальшим уточненням цього значення за схемою Рунге-Річардсона буде більш ефективним за відомий класичний метод Ромберга.

В цьому і полягає суть модифікованого методу Ромберга чисельного інтегрування.

Нехай є результати обчислення визначеного інтеграла за квадратурною формулою Сімпсона на сітці з кроком h

$$I = I_h^C + O(h^4) \tag{2.29}$$

і на сітці x кроком kh

$$I = I_{kh}^C + O((kh)^4).$$

Тоді за уточнене значення інтегралу приймається

$$I = \int_a^b f(x)dx = I_h^C + \frac{I_h^C - I_{kh}^C}{k^2 - 1} + O(h^5) \tag{2.30}$$

Оскільки для формули Сімпсона k=4, то (2.30) можна переписати у виді

$$I = \int_a^b f(x)dx = I_h^C + \frac{I_h^C - I_{kh}^C}{15} + O(h^5) \tag{2.31}$$

Обчислення зручно організувати за допомогою рекурентної формули.

Позначимо через

$$I_h^C(0) = \frac{b-a}{6m}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right). \tag{2.32}$$

квадратурну формулу Сімпсона з кроком $h=(b-a)/(2m)$.

Потім для кожного $j \geq 1$ визначимо $I_h^C(j) = I_h^T(f,h)$ формулу Сімпсона з кроком $h=(b-a)/(2m)^j$.

Тоді справедлива рекурентна формула:

ISBN 978-3-949059-53-7

$$I_h^C(j) = \frac{1}{3} I_h^C(j-1) + h\left(2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1})\right) \qquad (2.33)$$

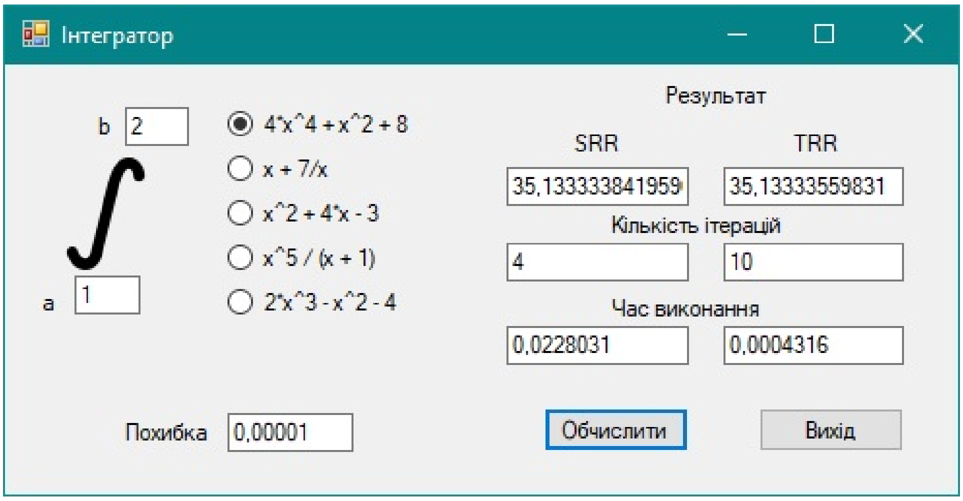
де $h=(b-a)/(2m)^{j-1}$ і $x_k=a+kh$.

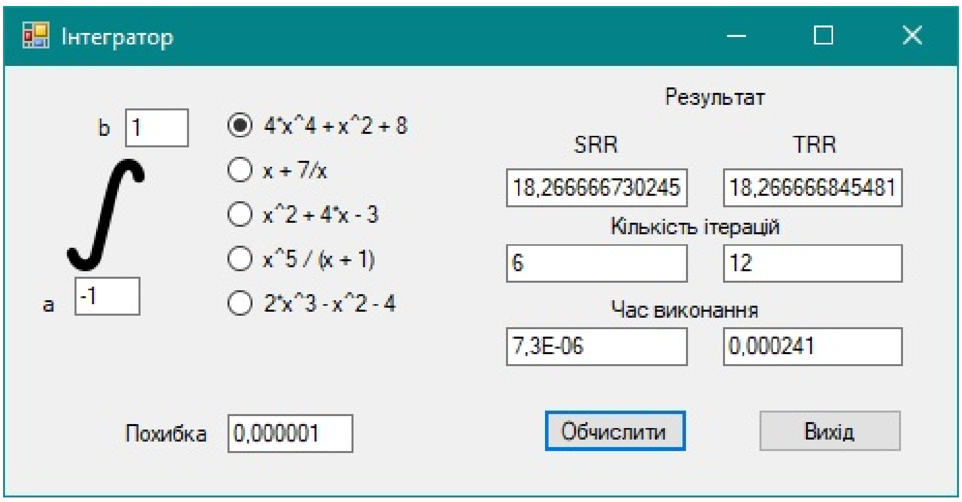
Очевидно, що похибка має порядок точності $O(h_n^{2m+2})$.

Рекурентна формула (2.33) використовується для програмної реалізації. Процес обчислень завершується, коли різниця двох послідовних наближень буде менше або рівна заданій точності.

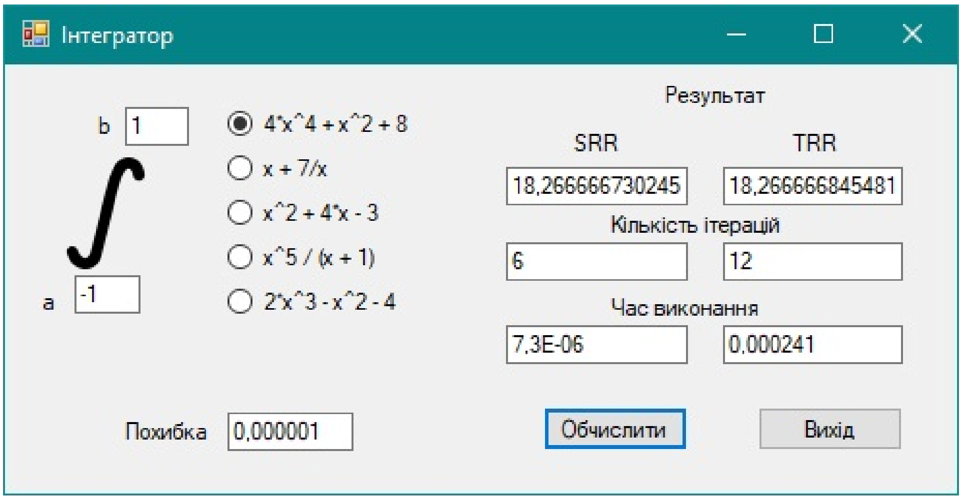
Нижче на рисунках подані результати комп’ютерного експерименту з наближеного обчислення визначеного інтегралу традиційним методом Ромберга (трапецій-Рунге-Річардсона – TRR) та модифікованим методом Ромберга (Сімпсона-Рунге-Річардсона – SRR).

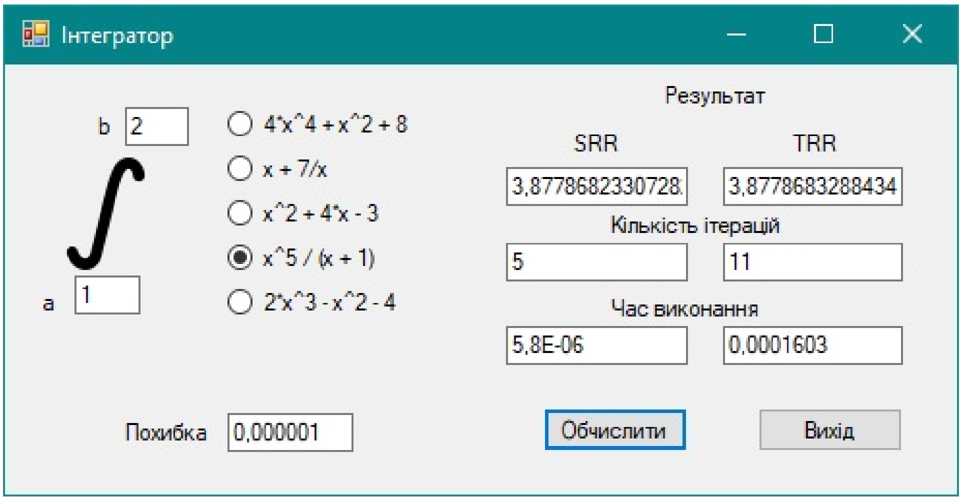
Якщо підінтегральна функція задана таблично, то для обчислення її інтеграла за схемою Сімпсона-Рунге-Річардсона не потребує попереднього згладжування початкових даних, так як саме інтегрування виконує часткове згладжування та «очищує» дані від «шуму».

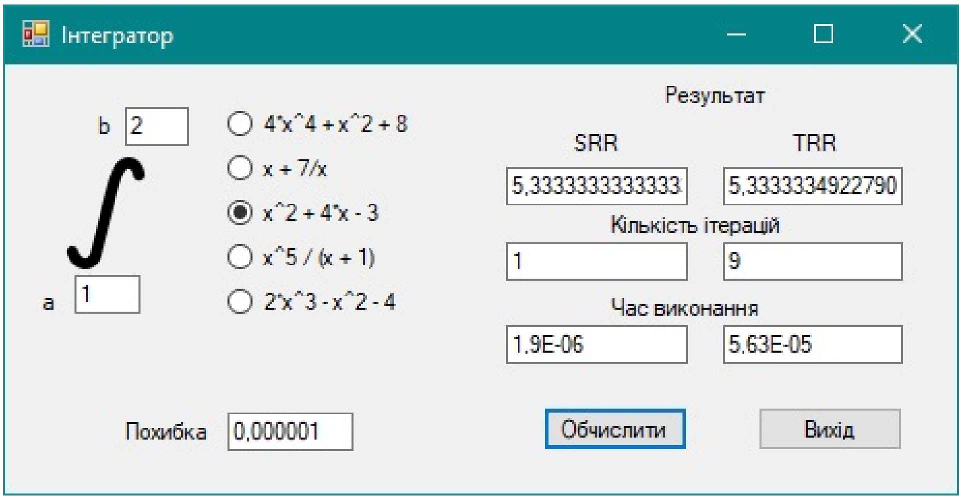




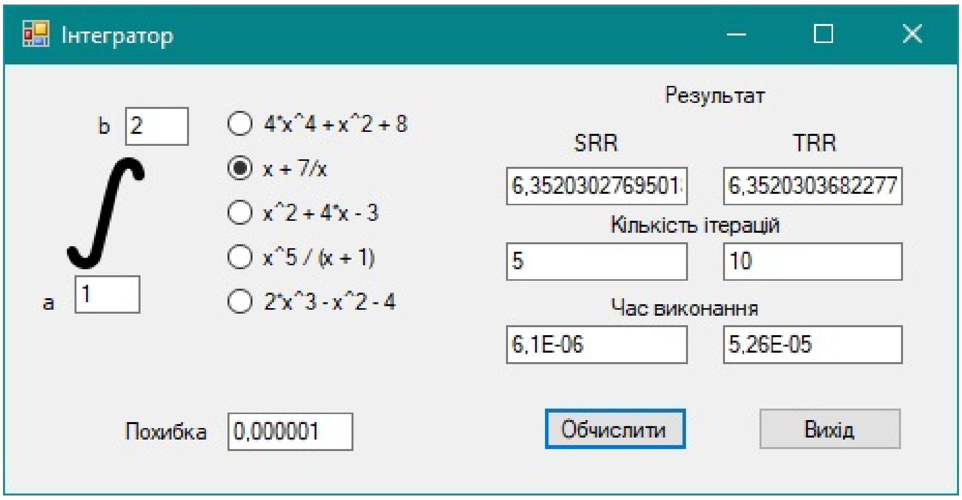
 ISBN 978-3-949059-53-7

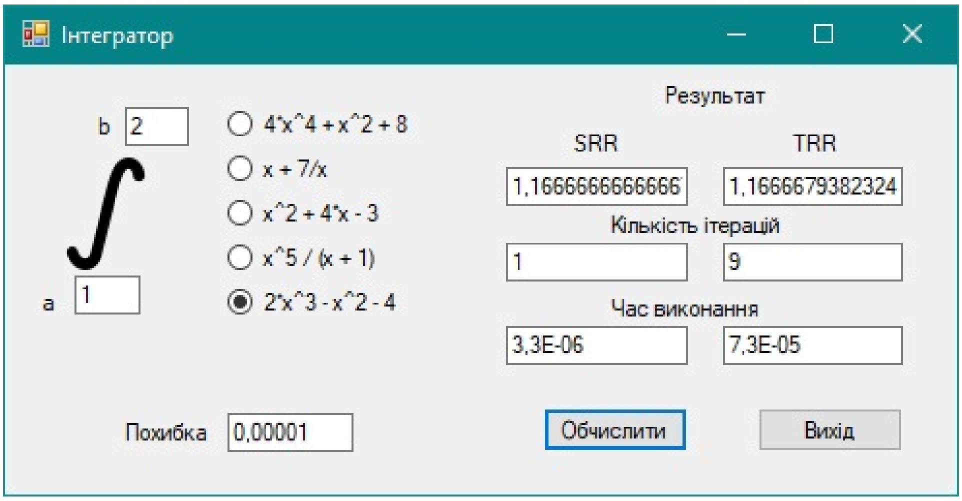


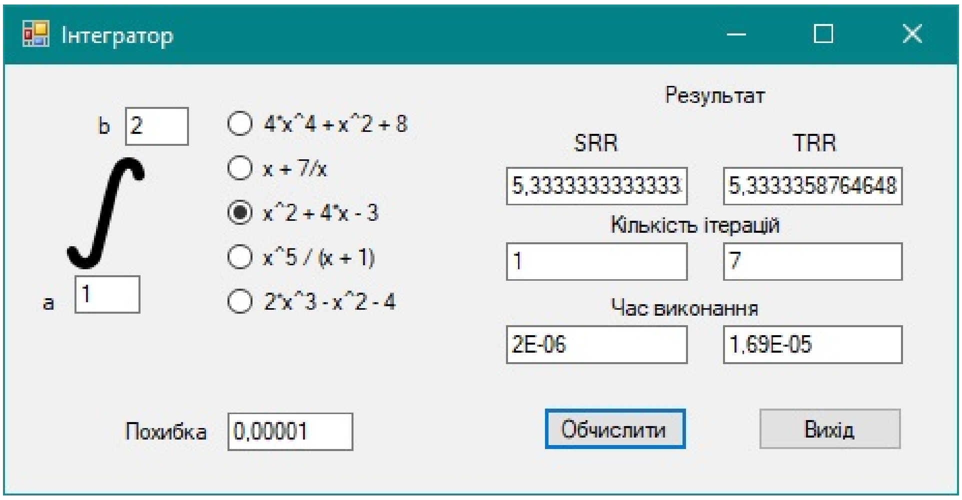




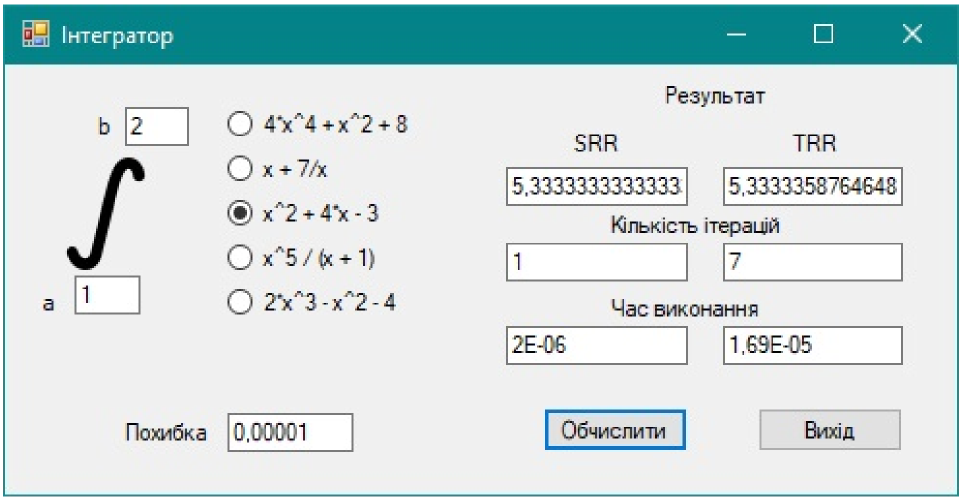
ISBN 978-3-949059-53-7







 ISBN 978-3-949059-53-7



Висновки

Встановлено, що основною похибкою чисельного інтегрування є похибка вибраного методу (квадратурної формули). Обчисливши або оцінивши значення залишкового члена квадратурної формули, отримаємо апріорну оцінку похибки квадратурної формули до початку розв’язання задачі.

Малі квадратурні формули чисельного інтегрування використовують фіксовані точки інтервалу інтегрування (кінці та середину) та мають низький порядок точності: 0 – методи правих та лівих прямокутників, 1 – методи середніх прямокутників і трапецій, 3 – метод парабол (Сімпсона). При використанні формул простих квадратур немає можливості керувати точністю обчислень (впливати на величину похибки).

Найбільш поширеними методами збільшення точності (зменшення похибки) чисельного інтегрування є [2, с.86]:

- розбиття інтервалу інтегрування на частини і побудова складених (великих) квадратурних формул;
- підвищення порядку точності квадратур (тобто підвищення степені поліномів, для яких квадратури точні);
- зведення інтегралів від функцій з особливостями до інтегралів від більш гладких функцій.

В другому розділі досліджено методи підвищення точності чисельного інтегрування з апостеріорною оцінкою їх похибок та алгоритми наближеного обчислення визначених інтегралів із заданою точністю. Розглянуто запропонований автором метод чисельного інтегрування з підвищеною та наперед заданою точністю, в якому, на відміну від загальновідомого методу Ромберга, в якості базової формули використовується складена квадратурна формула Сімпсона.

Результати верифікації і тестування комп’ютерної програми підтвердили ефективність запропонованого методу, його теоретичну і практичну цінність та перспективність застосування як в науково-технічних галузях, так і в навчальному процесі.