



## KAPITEL 1 / CHAPTER 1<sup>1</sup>

### BEARING CAPACITY OF THE WHEEL AND RAIL DURING ROLLING STOCK TRAFFIC

DOI: 10.30890/2709-2313.2022-10-02-016

Нагрузочная способность пары колесо и рельс является определяющей при проектировании и эксплуатации транспортных средств различного технологического назначения. Во время эксплуатации таких транспортных средств о нагрузочной способности колеса при увеличении вертикальных нагрузок на ось существуют противоречивые сведения. Так, вопреки принятым представлениям увеличение вертикальных нагрузок на ось ведет в ряде случаев к повышению долговечности и износостойкости элементов взаимодействующей пары [1].

Большинство авторов в вопросах взаимодействия колеса и рельса исходят из постановки и решения контактных задач для упругих полупространств. Как правило, контактные напряжения определяются на основании решения задачи Герца для различных видов кривизны и материалов колеса и рельса. При этом характер приработки колеса и рельса в ряде случаев позволяет принять расчетную схему в виде катящегося цилиндра по толстой пластине [2], опирающейся на сплошное упругое основание. Решение контактной задачи [3] показывает, что площадка контакта является эллиптической. Видимо контактные напряжения превышают пределы текучести материалов колеса и рельса, поэтому в процессе их приработке эллиптическая площадка контакта вытягивается вдоль оси колесной пары и приобретает форму прямоугольника [4].

Помимо вертикальных нагрузок действуют касательные силы сцепления. Силы сцепления между колесом и рельсом обусловлены трением при сцеплении и проскальзывании цилиндра и пластины, несовершенной упругостью материалов взаимодействующих элементов, силами молекулярного взаимодействия на контакте. На площадке контакта имеются зоны скольжения и сцепления, соотношение между этими зонами и контактными силовыми факторами существенно зависит как от скорости движения, так и скорости проскальзывания между колесом и рельсом.

Для описания движения колеса по рельсу используем постановку и решение задачи о качении с трением цилиндра по плоскости [3]. Однако использование такого моделирования процесса контактного взаимодействия не позволяет описать переходные режимы при разгоне колеса, а также не дает объяснения повышению износостойкости и долговечности контактирующей пары при увеличении в некотором диапазоне вертикальной нагрузки на колесо.

Следует отметить, что контактная задача о взаимодействии колеса и рельса сопровождается динамическими деформационными процессами, происходящими в тонких поверхностных слоях контактирующей пары, где непрерывно происходят процессы микросхватывания и последующего

<sup>1</sup>Authors: Dvoretzky Dmitry Nikolaevich, Kravchatyi Andrii Volodimirovich, Malinovskiy Yuriy Alexandrovich, Mینenko Roman Vadimovich, Tkachenko Andrey Sergeevich, Tsvirkun Sergij Leonidovich, Vlasenkov Dmitro Petrovich



разрушения очагов межмолекулярного взаимодействия кристаллических решеток элементов пары на фрикционном контакте.

Такой физический характер контактного взаимодействия выражается в непрерывном изменении коэффициента трения от скорости проскальзывания колеса по рельсу и деформативного проявления эффекта псевдоскольжения. Следовательно, принятая расчетная схема цилиндра, катящегося по толстой полосе (или пластине) достоверно описывает контактное взаимодействие исходя из геометрии площадки контакта. Описать с помощью такой модели динамические переходные режимы не представляется возможным, поскольку неустойчивые динамические режимы происходят в тонком поверхностном слое взаимодействующих колеса и рельса. Более правильно было бы рассмотреть контактную задачу для анизотропных колеса и рельса. При этом анизотропия колеса и рельса заключается в наличии на элементах контактирующей пары тонких поверхностных слоев с физико-механическими свойствами, отличными от физико-механических свойств более глубоких слоев деталей пути и колесной пары. Обычно в результате многократного прокатывания колеса по рельсу происходит поверхностное упрочнение наружных слоев на определенную глубину. Для определения толщины (или глубины) упрочненного поверхностного слоя известна приближенная (полуэмпирическая) формула [4]

$$h = \sqrt{\frac{P}{14+0,33HB}}, \text{ мм} \quad (1)$$

где  $h$  – толщина поверхностного (уплотненного) слоя рельса (или колеса);

$P$  – вертикальная нагрузка на колесо(рельс), кг;

$HB$  – твердость материала рельса (или колеса) по Бринеллю(кг/мм<sup>2</sup>).

Процессы, происходящие в колесе и рельсе при многократном прокатывании весьма близки к технологическим процессам холодной прокатки, обкатки и волочения.

Так, исходя из формулы (1), при увеличении внешней нагрузки на колесо (или колесную пару)  $P$ , возрастает толщина (глубина) поверхностного слоя, которая может достигать значений  $0 \leq \delta \leq 25$  мм, твердость детали увеличивается на 40 ... 50%, предел усталости детали повышается на 80% и более [5]. Следовательно, при эксплуатации рельсовых подвижных составов всегда имеется дополнительный резерв для повышения долговечности и работоспособности колеса и рельса, который не всегда очевиден в эксплуатационных условиях.

Данная работа направлена на реализацию идеи о повышении нагрузочной способности колесных пар. С этой целью целесообразно провести ряд экспериментов по нагружению колесных пар вертикальной нагрузкой, сопоставимой с соответствующей номинальной нагрузкой  $P$ , в некотором диапазоне её изменения  $0,75 P \leq P \leq 1,25 P$ . Этим нагрузкам необходимо будет поставить в соответствие глубину упрочненного слоя и соответствующее значение предела текучести материала детали.

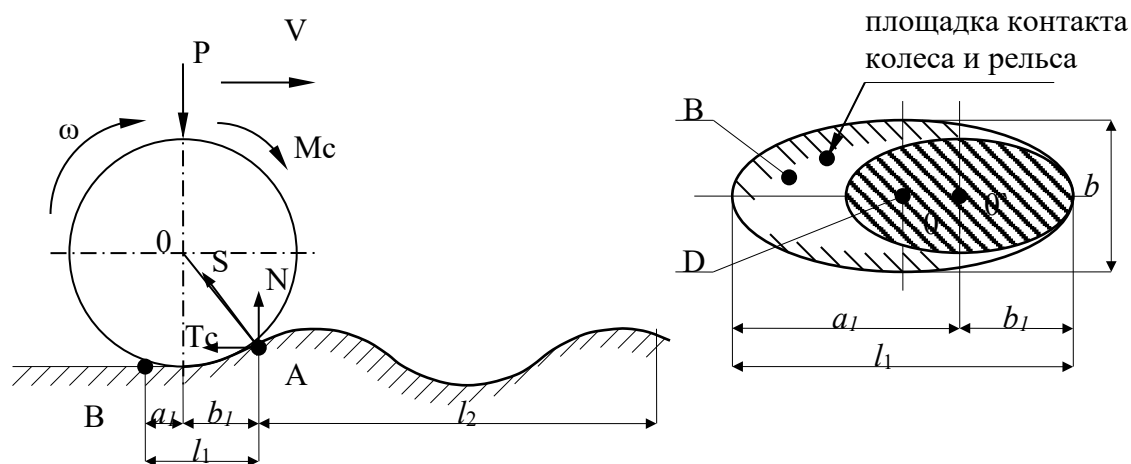
После определения толщины уплотненного поверхностного слоя (для одной из деталей) целесообразно было бы рассматривать контактную задачу для



анизотропных ролика и полосы, однако, в этом случае существенно возрастут математические сложности при постановке и решении такой задачи.

Поэтому на начальном этапе для схематизации задачи используем физическую модель, в которой поверхностный слой рельса (или колеса) представлен в виде достаточно тонкой балки на упругом основании, состоящей из двух частей. Первая часть – это участок балки в зоне контакта колеса и рельса (размеры этого участка определены из условий контактного взаимодействия для задачи Герца [6] и Галина [3]). Вторая часть представляет собой участок той же балки в зоне перед первоначальной точкой контакта колеса и рельса (точка А, рисунок 1). Протяженность этого участка пока неизвестна и будет определена, исходя из потери его устойчивости. Участок нагружен результирующей касательной силой  $T$ , приложенной в точка А.

Площадка контакта колеса и рельса



**Рисунок 1 - Формирование пятна контакта пары колесо-рельс и образование деформационной волны впереди колеса**

$B$  – зона контакта;  $\theta$  – зона сцепления

Первый участок балки (рисунок 1) нагружен распределенным давлением с результирующей вертикальной нагрузкой  $P$  по площадке взаимодействия и результирующей касательной нагрузкой  $T' = T_v$  впереди зоны контакта. Исходя из характера нагружения колесной пары исходной вертикальной нагрузкой и возникающими при этом касательными усилиями, нет оснований для проявления динамически неустойчивых переходных режимов. Остановимся на причинах неустойчивого движения при переходных режимах (в случае разгона и торможения колесных пар). Во время набора ведущей колесной парой (колесом) номинальной скорости движения, возникает изменение скорости проскальзывания колеса относительно рельса, и если скорость проскальзывания находится в области ниспадающей ветви характеристики трения, то режим псевдоскольжения в зоне контактного взаимодействия сопровождается автоколебаниями поверхностных слоев в пределах первого участка. Такие зоны неустойчивости могут иметь место при разных абсолютных значениях линейных (или окружных) скоростей колеса, важно только, чтобы относительная скорость



проскальзывания (псевдоскольжения) соответствовала ниспадающему участку характеристики трения [7]. На наличие таких неустойчивых режимов при разгоне или торможении колеса (колесной пары) указал В. В. Болотин [8] с ссылкой на более ранние работы Дж. Денгартога и С. П. Тимошенко. Если имеет место неустойчивый (динамический) режим при разгоне колесной пары, то он вызывается переменными (динамическими) усилиями. Следовательно, равнодействующая касательного усилия в зоне контакта будет иметь постоянную и переменную составляющие (усилия  $T, T'$ ). Поэтому касательное усилие, которое передается на гребень деформационной волны впереди точки контакта (т. А, рис.1) также будет переменным.

Значит вторая зона гипотетической балки будет нагружена изменяющейся во времени силой. Эта особенность нагружения второго участка балки будет нами в дальнейшем учтена при составлении дифференциального уравнения продольных колебаний балки (с учетом её продольной устойчивости).

Предварительно рассмотрим процесс взаимодействия колеса и рельса в зоне контакта (в пределах первого участка балки) (рис.1).остановимся на представлении о том, что согласно гипотезе Картера [9], [10] катящееся колесо и рельс взаимодействуют по площадке контакта, которая включает зоны скольжения (проскальзывания) из-за разности геометрической и деформационной скоростей. В случае качения колеса по рельсу имеет место состояние, когда взаимодействуют колесо и рельс, выполненные из одного материала (или разных материалов с близкими физическими свойствами).

Рассмотрим решение контактной задачи о взаимодействии цилиндра и полосы исходя из наличия при контакте тонких поверхностных слоев, зон скольжения и сцепления. На границах этих зон наблюдается неустойчивый характер взаимодействия. Так, если рассматривать отдельно процесс буксования колеса, то возможность развития фрикционных колебаний близка к нулю.

На участке сцепления цилиндра с полосой развитие автоколебаний уже невозможно, так как произошло «схватывание» поверхностей. Поэтому остается полагать, что неустойчивый процесс взаимодействия полосы и рельса возможен при качении колеса на границах зон скольжения и сцепления. Для

описания переходных режимов пока ограничимся участком контакта, который находится под колесом [9]. Если считать контакт упругим, то длина участка определится на основании [3] по формуле

$$l_1 = \sqrt{8Pr\bar{k}}, \quad (2)$$

где  $l_1$  – длина участка контакта между взаимодействующими колесом и рельсом;

$P$  – вертикальная нагрузка на колесо;

$r$  – радиус колеса;

$\bar{k} = \frac{4(1-\mu^2)}{\pi E}$  – упругая константа;

$\mu$  – коэффициент Пуассона;

$E$  – модуль Юнга.

Рассмотрим усилия, за счет которых участок контакта длиной  $l_1$



удерживается в положении динамического равновесия. Обращаясь к реакции упругого основания, согласно гипотезе Винклера, эта реакция уравнивает вертикальную нагрузку на колесо  $P$ , которую условно можно считать постоянной, поэтому на касательные перемещения участка контакта она влияния не оказывает.

Рассмотрим касательные усилия, действующие на участке контакта, под влиянием которых участок как-бы находится в равновесии. Проекция участка контакта на плоскость, проходящую через головки рельсов, воспринимает силу инерции площадки  $F_{ин}$ , горизонтальную составляющую упругой связи  $F_{уп}$  и касательное толкающее усилие  $T_c$ . Участок контакта колеса и рельса под действием указанных нагрузок представляем совершающим автоколебательные движения для перемещающегося со скоростью  $v$  экипажа. Указанные автоколебательные движения обусловлены нестационарной характеристикой трения [2] и эффектом псевдоскольжения [10].

Баланс сил на участке контакта приводим к уравнению вида

$$\gamma l b h \ddot{\xi} + \frac{2}{k} \frac{b h}{l} \xi = T_c, \quad (3)$$

где  $\xi$  – удельная масса материала участка контакта рельса (колеса);

$l_1 = \sqrt{8Pr\bar{k}}$  – длина участка контакта для случая упругой задачи;

$b = \sqrt{2Pr\bar{k}}$  – ширина участка контакта для упругой задачи;

$h = \sqrt{\frac{P}{\sigma_T}}$  – толщина уплотненного поверхностного слоя на площадке

контакта;

$\xi$  – смещение точек колеса относительно точек рельса при псевдоскольжении (относительном проскальзывании);

$\sigma_T$  – предел текучести материала рельса (или колеса).

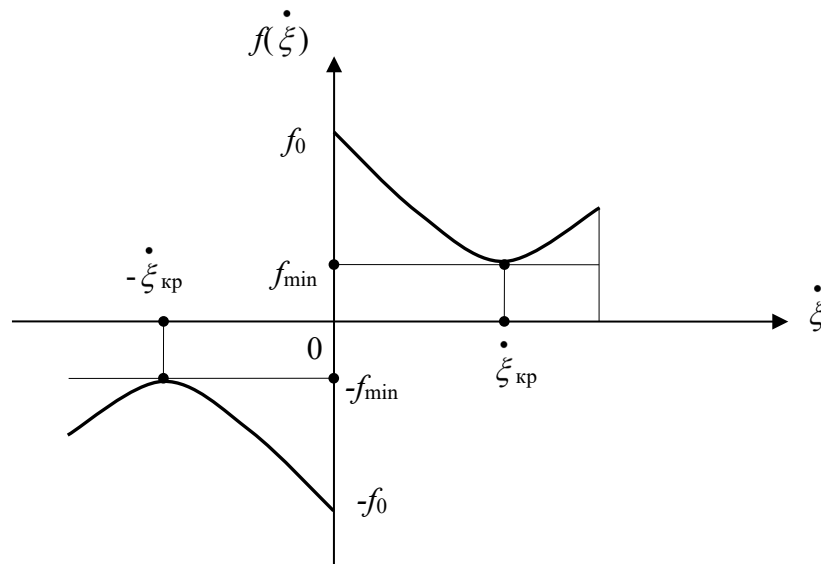
Далее переходим к равнодействующему касательному усилию сопротивления перекачиванию  $T_c$ , которое определяем на основании выражения для момента сопротивления перекачиванию колеса  $M_c$  [11].

$$M_c = \frac{fr}{2\bar{k}} (\sqrt{8\bar{k}Pr} + \frac{\delta r}{f}), \quad (4)$$

откуда

$$T_c = \frac{M_c}{r} = \frac{f}{2\bar{k}} (\sqrt{8\bar{k}Pr} + \frac{\delta r}{f}), \quad (5)$$

где в выражениях (4), (5)  $f = f(\dot{\xi})$  – коэффициент трения скольжения материала колеса по материалу рельса, как функция скорости взаимного проскальзывания, может быть представлена по аналогии с [12], в виде кубической зависимости от  $\dot{\xi}$  (рисунок 2)



**Рисунок 2 - Характеристика трения колеса по рельсу как функция скорости проскальзывания  $\dot{\xi}$**

$$f = f_0 - \frac{3}{2}(f_0 - f_{min}) \frac{\dot{\xi}}{\dot{\xi}_{кр}} + \frac{f_0 - f_{min}}{2} \left(\frac{\dot{\xi}}{\dot{\xi}_{кр}}\right)^3,$$

$f_0$  – коэффициент трения покоя при  $\dot{\xi}=0$ ;

$f_{min}$  – коэффициент трения скольжения при  $\dot{\xi} = \dot{\xi}_{кр}$ ; (тогда  $f_0 - f_{min} = \Delta f$ );

$\dot{\xi}_{кр}$  – критическая скорость проскальзывания колеса по рельсу, при которой  $f = f_{min}$ ;

$\delta$  – относительное скольжение между колесом и рельсом, которое характеризуется упругим проскальзыванием волокон колеса относительно поверхности рельса в направлении, обратном перемещению колеса

$$\delta = \frac{\Delta\dot{\varphi}}{\omega} = \frac{\Delta\omega}{\omega\omega} = \frac{\Delta v}{v} = \frac{-\dot{\xi}}{v}.$$

Следовательно, относительное скольжение при качении колеса можно определить, как отношение приращения угловой скорости колеса к его номинальной угловой скорости.

Рассмотрим выражение для псевдоскольжения, если угловая скорость проскальзывания колеса будет переменной величиной, то есть  $\Delta\dot{\varphi} \neq const$ , тогда

$$\delta = \frac{(\dot{\varphi} + \Delta\dot{\varphi})r - v}{\omega_0 r} = \frac{\Delta\dot{\varphi}}{\omega_0}. \quad (6)$$

Приращение линейной скорости колеса в выражении  $v \pm \dot{\xi}$  (или  $\omega_0 r \pm \dot{\xi}$ ) пренебрегаем, так как  $\dot{\xi} \ll v$ .

Преобразуем выражение для силы сопротивления перекачиванию колеса (ролика) по рельсу (пластине) в зависимости от относительной скорости скольжения –  $\dot{\xi}/\dot{\xi}_{кр}$  (или  $\Delta\dot{\varphi}/\Delta\omega_{кр}$ ). Будем различать силу сопротивления перекачиванию, приложенную к рельсу (полосе) и к колесу (ролику).

При выводе соотношений для силы сопротивления перекачиванию сначала запишем выражение для коэффициента трения скольжения, который



аппроксимируется в виде кубической функции скорости скольжения, согласно [12]:

а) относительно участка контакта на рельсе

$$f = f_0 - \frac{3}{2} \Delta f \left( \frac{-\dot{\xi}}{\dot{\xi}_{кр}} \right) + \frac{\Delta f}{2} \left( -\frac{\dot{\xi}}{\dot{\xi}_{кр}} \right)^3, \quad (7)$$

б) относительно участка контакта на колесе

$$f = f_0 - \frac{3}{2} \Delta f \left( \frac{\Delta\dot{\varphi}}{\Delta\omega_{кр}} \right) + \frac{\Delta f}{2} \left( \frac{\Delta\dot{\varphi}}{\Delta\omega_{кр}} \right)^3. \quad (8)$$

В приведенных выражениях:

$\Delta f = f_0 - f_{min}$  – приращение коэффициента трения скольжения колеса по рельсу при их взаимном проскальзывании;

$\dot{\xi}$  – скорость проскальзывания колеса по рельсу при качении;

$\dot{\xi}_{кр}$  – критическая скорость проскальзывания колеса по рельсу, которая соответствует  $f_{min}$ ;

$\Delta\dot{\varphi}$  – угловая скорость проскальзывания колеса по рельсу;

$\Delta\omega_{кр}$  – критическая угловая скорость проскальзывания колеса по рельсу.

Отметим, что  $v$  – линейная скорость точек обода колеса при его качении. Может быть, как постоянной, так и переменной величиной (не колебательного характера).

Тогда усилия для перекачивания колеса запишем в виде:

а) для точек рельса

$$T_c = \frac{\sqrt{8kPr}}{2k} \left[ f_0 - \frac{3}{2} \Delta f \left( -\frac{\dot{\xi}}{\dot{\xi}_{кр}} \right) + \frac{\Delta f}{2} \left( -\frac{\dot{\xi}}{\dot{\xi}_{кр}} \right)^3 \right] + \frac{r}{2k} \frac{\dot{\xi}}{v}; \quad (9)$$

б) для точек колеса

$$T_c = \frac{\sqrt{8kPr}}{2k} \left[ f_0 - \frac{3}{2} \Delta f \left( \frac{\Delta\dot{\varphi}}{\Delta\omega_{кр}} \right) + \frac{\Delta f}{2} \left( \frac{\Delta\dot{\varphi}}{\Delta\omega_{кр}} \right)^3 \right] + \frac{r}{2k} \frac{\Delta\dot{\varphi}}{\omega}. \quad (10)$$

Таким образом, представлена характеристика трения как функция скорости скольжения (7), (8). Для построения графика  $f = f(\xi)$  необходимо знать  $f_0(f_{max})$ ,  $f_{min}$  и  $\dot{\xi}_{кр}$  – критическое значение скорости скольжения.

Обратимся к механическому аспекту гипотезы Картера о псевдоскольжении. Принято считать, что на опорных поверхностях (рис.1) существует зона сцепления, которая под влиянием неравномерного распределения давлений на площадке контакта смещается к её набегающему краю. Это обусловлено тем, что под влиянием вращающего момента  $M$  нормальная реакция  $N$  сместится на величину  $\lambda$  по направлению движения колеса. Тогда полная реакция  $S$  пройдет через точку  $A$  и центр вращения колеса.

Составляющая полной реакции  $T$  представляет собой сопротивление движению колеса. Следовательно, реакция рельса  $N$  смещена на величину  $\lambda$  относительно вертикальной оси, поэтому поступающие на контактную площадку условные волокна материала бандажа колеса, будут испытывать дополнительный подпор со стороны рельса, вследствие чего в набегающей части опорной площадки они будут сжатыми, а в сбегавшей – растянутыми.



Существует и другая гипотеза возникновения касательных сил сцепления. Она основана на предположении о том, что в пределах опорной поверхности нет относительного смещения волокон материала бандажа колеса и рельса, а возникающие на ней касательные напряжения в любой точке контакта пропорциональны контактному давлению (Б. С. Ковальский, М. М. Саверин, Р. Лоренц, Л. Фепль).

Некоторые сторонники гипотезы, отрицающей наличие зоны сцепления, например, Ф. Фредерик и другие, принимают определенную зависимость силы трения на опорной поверхности от скорости упругого скольжения.

Тогда дифференциальное уравнение баланса сил на участке контакта запишем, с учетом приведенных соображений, отдельно для деформационного приращения участка рельса  $\xi$  и деформационного приращения участка бандажа колеса, исходя из очевидного соотношения  $\xi = r\Delta\varphi$ . Преобразуем дифференциальное уравнение (3), описывающее динамически неустойчивое состояние площадки контакта, исходя из представления характеристики трения, как функции скорости скольжения [12],[13].

Динамическая неустойчивость обусловлена непостоянством силы трения на участке контакта, где имеется переток потенциальной энергии деформации в кинетическую энергию выступов внешних волокон колеса и рельса при их взаимодействии. Используя дифференциальное уравнение баланса сил в форме (3) с учетом выражения касательной силы в [3] (формулы (9), (10)) и кубическому закону трения [12] в результате будем иметь:

$$\gamma l_1 b h \ddot{\xi} + \frac{2}{k} \cdot \frac{b h}{l_1} \dot{\xi} = \frac{f}{2k} (\sqrt{8kPr} + \delta \frac{r}{f}), \quad (11)$$

$$\gamma l_1 b h \ddot{\xi} + \frac{2}{k} \cdot \frac{b h}{l_1} \dot{\xi} = \left[ f_0 - \frac{3}{2} (f_0 - f_{min}) \cdot \left( -\frac{\dot{\xi}}{\dot{\xi}_{кр}} \right) + \frac{f_0 - f_{min}}{2} \left( -\frac{\dot{\xi}}{\dot{\xi}_{кр}} \right)^3 \right] \frac{\sqrt{8kPr}}{2k} + \frac{r}{2k} \left( \frac{\dot{\xi}}{v} \right) \quad (12)$$

В уравнении (12) правая часть представляет собой усилие сопротивления перекатыванию. Первое слагаемое в скобках соответствует второй гипотезе возникновения сил сцепления, согласно которой в пределах опорной поверхности нет относительного смещения волокон материала. Второе слагаемое в правой части соответствует гипотезе Картера о псевдоскольжении [9] (первая гипотеза).

Кроме того, принимаем, что коэффициент трения материала колеса о материал рельса не является постоянной величиной, а описывается некоторой функцией скорости проскальзывания колеса по рельсу, например, кубической параболой [12] или [13]. Функция имеет выраженный минимум  $f_{min}$ , при значении скорости проскальзывания  $\dot{\xi}_{кр}$ . Причем, для скоростей скольжения  $\dot{\xi} < \dot{\xi}_{кр}$  изменение  $f(\dot{\xi})$  происходит практически по линейному закону (ниспадающий участок кривой). При  $\dot{\xi} > \dot{\xi}_{кр}$  кривая имеет выраженный нелинейный характер.

Если следовать зависимости (9) для усилия перекатывания колеса  $T_c$ , то по её форме видно, что  $T_c$  фактически является силой трения, которой пропорционален износ колеса и рельса, тогда при увеличении вертикальной





нагрузки на колесо, касательная нагрузка изменяется  $T_c \sim \sqrt{P}$ . Так, например, при увеличении вертикальной нагрузки на колесо в пределах до 15%, касательное усилие  $T_c$  увеличивается до 7%, то есть  $\sim \sqrt{P}$ . Кроме того, при увеличении  $P$  происходит повышение несущей способности пары пропорционально  $\sqrt{P}$  (вследствие наклепа и последующего самоупрочнения).

Далее рассмотрим выражения силы сопротивления перекатыванию колеса  $T_c$ , формулы (9), (10) с учетом соотношений  $-\frac{\xi}{v} = \delta$  и  $f_0 - f_{min} = \Delta f$  (независимо от дифференциального уравнения (12)), причем слагаемые пропорциональные  $(\dot{\xi})$ ,  $(\dot{\xi})^3$  представим как функции относительного скольжения  $\delta$ .

$$T_c = -f_0 \frac{\sqrt{2k}}{k} \sqrt{Pr} - \frac{3}{2} \Delta f \frac{\sqrt{2k}}{k} \sqrt{Pr} \left(-\frac{\xi}{v}\right) \frac{v}{\xi_{кр}} - \frac{\Delta f \sqrt{2k}}{2k} \sqrt{Pr} \left(-\frac{\xi}{\xi}\right)^3 \left(\frac{v}{\xi_{кр}}\right)^3 + \frac{\xi}{v} \cdot \frac{r}{2k} \quad (13)$$

или в виде

$$T_c == -f_0 \frac{\sqrt{2k}}{k} \sqrt{Pr} - \frac{3}{2} \Delta f \frac{\sqrt{2k}}{k} \sqrt{Pr} \delta \frac{v}{\xi_{кр}} + \frac{\Delta f \sqrt{2k}}{2k} \sqrt{Pr} \delta^3 \left(\frac{v}{\xi_{кр}}\right)^3 - \delta \frac{r}{2k} \quad (14)$$

Если усилие перекатывания  $T_c$  приложено к колесу, тогда будем иметь

$$T_c == - \left[ f_0 \frac{\sqrt{2k}}{k} \sqrt{Pr} - \frac{3}{2} \Delta f \frac{\sqrt{2k}}{k} \sqrt{Pr} \delta \frac{\omega}{\Delta\omega_{кр}} + \frac{\Delta f \sqrt{2k}}{2k} \sqrt{Pr} \delta^3 \left(\frac{\omega}{\Delta\omega_{кр}}\right)^3 - \frac{r}{2k} \cdot \frac{\Delta\phi}{\omega} \right] \quad (15)$$

Судя по выражениям (13), (14), (15) сила сопротивления перекатыванию зависит от нормального давления ( $P$ ), изменения коэффициента трения ( $f_{тр}$ ) между колесом и рельсом, псевдоскольжения  $\delta$ , скорости движения колеса ( $v$ ).

То есть, усилие сопротивления движения  $T_c$  объединяет в себе усилия сопротивления, определенные по двум гипотезам: 1) Картера; 2) Б. С. Ковальского, М. М. Саверина, Р. Лоренца, Л. Фепля с поправкой Ф. Фредерика на зависимость силы трения опорной поверхности от скорости взаимного проскальзывания (иначе силы сопротивления перекатыванию как функции скорости упругого проскальзывания).

Таким образом, первые слагаемые в выражениях (13), (14), (15) соответствует гипотезе взаимодействия колеса и рельса о том, что касательные усилия в зоне контакта пропорциональны нормальному (контактному) давлению и на опорных поверхностях нет взаимного смещения волокон (вторая гипотеза).

Второе слагаемое свидетельствует о том, что оно является возбуждающей нагрузкой для участка контакта бандажа и рельса и характер влияния этой нагрузки на решение уравнения (12) будет нарастающим при отрицательном демпфировании и относительно малых скоростях взаимного проскальзывания.

Следовательно, второе слагаемое свидетельствует о том, что рост касательного усилия пропорционален корню квадратному из нормального давления  $\sqrt{P}$ , относительному скольжению  $\delta$  и скорости качения колеса  $v$ . Причем рост касательного усилия возможен на ниспадающем участке характеристики трения, когда скорость проскальзывания удовлетворяет неравенству  $\dot{\xi} < \dot{\xi}_{кр}$  и коэффициент трения изменяется в пределах  $f_{min} \leq f \leq f_0$ . Этот диапазон изменения коэффициента трения  $f$  соответствует участку



нарастания самовозбуждающихся колебаний в системе за счет перераспределения энергии движения колеса в деформационной зоне контакта колеса и рельса.

Характер влияния третьего слагаемого в выражениях (13) – (15) будет аналогичным второму, однако это слагаемое вносит в колебательный процесс затухающее воздействие, и его влияние становится ощутимым, если скорость скольжения удовлетворяет неравенству  $\dot{\xi} > \dot{\xi}_{кр}$ .

Так как влияние этого слагаемого пропорционально кубу скорости проскальзывания  $\dot{\xi}^3$  (или  $\delta^3$ ), то касательное усилие получит ограниченное приращение, при котором с дальнейшим увеличением  $\dot{\xi}$ , рост амплитуд колебаний может вообще прекратиться. Учитывая то, что во второе и третье слагаемое входит множитель  $v$  (скорость движения колеса), то автоколебательные процессы могут возникать в системе при разных скоростях качения колеса (колесной пары). На это было обращено внимание В. В. Болотина [8], с ссылкой на более ранние работы Дж. П. Ден-Гартога и С. П. Тимошенко о том, что при переходных режимах работы подвижного состава могут возникать автоколебательные процессы на разных скоростях его движения.

Четвертое слагаемое соответствует значению усилия сопротивления перекачиванию согласно гипотезе Картера. За счет взаимодействия и деформирования микронеровностей на бандаже колеса и рельсе в определенные моменты времени часть микронеровностей сжимается, они накапливают потенциальную энергию деформации и приращение скорости колеса уменьшается, когда накопившейся потенциальной энергии деформации микронеровностей будет достаточно, то она будет высвобождаться (подобно сжатой пружине) и трансформироваться в кинетическую энергию движения микронеровностей и приращение скорости движения колеса будет увеличиваться. Этот процесс является взаимным на площадках контактирования колеса и рельса, поэтому скорость скольжения элементов пары будет изменяться. Таким образом, этот процесс является циклическим для изменяющихся площадок контакта. В случае бесконечно длинного рельса и замкнутой окружности контакта для колеса процесс самовозбуждения автоколебаний может носить непрерывный характер. Как следует из (14) обе гипотезы взаимодействия имеют фрикционную природу и представлены в приведенных выражениях. Если полагаться на использование гипотезы Картера при теоретическом обосновании влияния усилия перекачивания на неустойчивые динамические режимы при разгонах и торможениях подвижных составах, то её применение вносит в расчеты определенные погрешности, так как присутствие слагаемого  $T_{ск} = \delta r / 2k$  в дифференциальном уравнении колебаний площадки контакта поверхностных слоев приводит к развитию возрастающих автоколебаний, что не подтверждается при эксплуатации реальных подвижных составов. То есть гипотеза Картера достоверно описывает развитие усилий псевдоскольжения в пределах очень узкого диапазона изменения скорости проскальзывания рост и амплитуд автоколебаний  $T_{ск}$  и  $\dot{\xi}$ , по видимому, должен компенсироваться введением в формулу Картера дополнительных нелинейных



слагаемых, которые не были учтены автором гипотезы, например, в виде

$$T_{\text{СК}} = -k\delta + k_1\delta^2 + k_2\delta^3 + \dots, \quad (16)$$

где  $k = -\frac{r}{2\bar{k}}$  – коэффициент псевдоскольжения в интерпретации Л. А.

Галина, И. Т. Горячевой [3];

$\delta$  – относительное скольжение между колесом и рельсом;

$k = \frac{4(1-\mu^2)}{\pi E}$  – упругая константа материала;

$\mu$  – коэффициент Пуассона;  $E$  – модуль Юнга;

$k_1, k_2$  – неопределенные коэффициенты, значения которых могут быть установлены по уточненной зависимости  $T_{\text{СК}} = T_{\text{СК}}(\delta)$ , что представляет задачу для дальнейших исследований.

Полученные общие зависимости для силы сопротивления перекачиванию, подставленные в (15), являются возмущающим воздействием для системы дифференциальных уравнений, связывающих автоколебательный процесс в зоне контакта колеса и рельса с раскачкой колебательных движений в приводном механизме ведущей колесной пары.

С целью упрощения связанной задачи о возбуждении совместных колебательных движений при проскальзывании колеса в зоне контакта с рельсом и развитии переходных процессов в приводном механизме ведущей колесной пары предварительно будем считать, что электромеханическая система привода колесной пары является абсолютно жесткой и автоколебательные процессы в зоне контакта на привод не оказывают существенного влияния.

Обратимся к структуре уравнений (12), а также выражений (12), (14), (15)

1) первое слагаемое левой части является силой инерции поверхностных слоев в зоне контакта колеса и рельса, величина его может быть малым параметром для  $\ddot{\xi}$  при развитии переходных режимов;

2) второе слагаемое левой части обеспечивает переменную «жесткую» взаимосвязь с близлежащими слоями материала, его влияние может быть значительным;

3) первое слагаемое в правой части представляет собой постоянную составляющую силы сопротивления  $T_0$ , то есть наибольшее значение силы сопротивления  $T_C$ ;

4) первое, второе и третье слагаемые правой части (12), а также (13), (14), (15) в сумме представляют собой минимальное значение силы сопротивления  $T_{\text{min}}$  для точки  $\dot{\xi} = \dot{\xi}_{\text{кр}}$ ;

5) четвертое слагаемое правой части (12) представляет собой деформационную составляющую при прокатывании колеса по рельсу (в представлении Картера о псевдоскольжении), по-видимому, связанную с фрикционными характеристиками контактирующих деталей, но не находит отражения ни в гипотезе Картера, ни в других гипотезах взаимодействия колеса и рельса [9]. Отметим, что четвертое слагаемое не отражает нелинейных характеристик материалов колеса и рельса при псевдоскольжении.

Рассмотрим процесс контактного взаимодействия при качении колеса по



рельсу.

В силу того, что рельс является объектом значительной протяженности, а колесо при качении осуществляет непрерывный контакт с путевой структурой, поэтому автоколебательный процесс на движущейся площадке контакта можно считать непрерывным. Для данной задачи абсолютное перемещение площадки контакта  $x$  можно считать состоящим из суммы переносного движения площадки  $v$  при скорости экипажа  $v$  и относительного перемещения площадки при автоколебаниях  $\xi$ , то есть

$$x = vt + \xi \quad (\xi = x - vt) \quad (17)$$

$$m\ddot{x} + cx = T_c(\dot{x} - v) \quad (18)$$

или с учетом (17)

$$m\ddot{\xi} + c(\xi + vt) = T_c(\dot{\xi}). \quad (19)$$

В приведенных уравнениях

$m = \gamma l_1 bh$  - масса участка контакта колеса и рельса (со стороны рельса);

$C = \frac{2bh}{\bar{k}l_1}$  - жесткость продольной связи участка контакта с основным

массивом рельса;

$T_c$  - сила сопротивления перекачиванию колеса по рельсу может быть записана с учетом фрикционной и деформационной составляющих (по гипотезе Картера).

Тогда выражение (19) представляет собой уравнение, описывающее автоколебания участка контакта, перемещающегося по рельсу со скоростью  $v$ .

Если смоделировать колебательный процесс так, что перемещающийся участок контакта помещен в подвижную систему координат, горизонтальная ось которой и начало координат движутся со скоростью колесной пары  $v$ , в этом случае автоколебательный процесс может быть описан уравнением

$$m\ddot{\xi} + c\xi = -T_c, \quad (20)$$

при этом в подвижной системе координат скорость движения участка контакта будет равна 0 ( $v=0$ ).

При необходимости ввести дополнительные уравнения, учитывающие движение колесной пары и привода в уравнение (19) вводим дополнительную переменную вместо  $v_t = \xi_1$  и дополнительное уравнение, учитывающее движение колесной пары.

Исходя из изложенных соображений уравнение, описывающее самовозбуждающиеся колебания на участке контакта запишем в виде

$$\gamma l b h \ddot{\xi} + \frac{2bh}{\bar{k}l} \xi = -\frac{\sqrt{kPr}}{\bar{k}} \left[ f_0 - \frac{3}{2} \Delta f \left( \frac{\dot{\xi}}{v} \right) \frac{v}{\xi_{кр}} + \frac{\Delta f}{2} \left( \frac{\dot{\xi}}{v} \right)^3 \left( \frac{v}{\xi_{кр}} \right)^3 \right] + \frac{\xi}{v} \cdot \frac{r}{2\bar{k}}. \quad (21)$$

Уравнение (21) записано для рельса, но по аналогии может быть записано и для колеса, с учетом электромеханической системы привода колесной пары (а также с учетом уравнений движения колеса и привода колесной пары, соединенных участком оси колеса с редуктором и двигателем).

Движения, которые описываются (21) правильно отнести к релаксационным



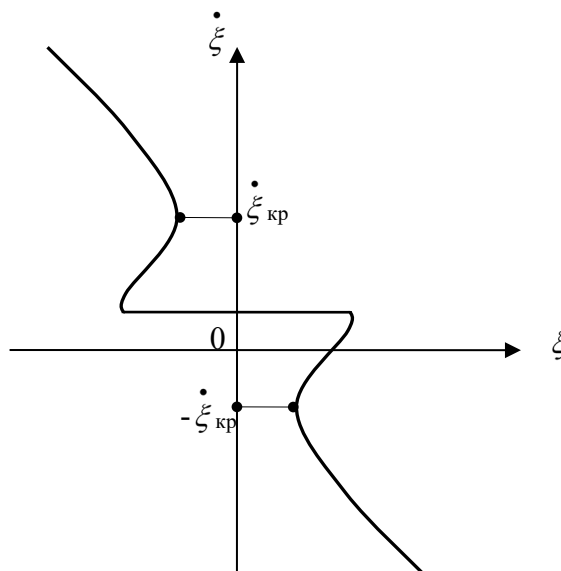
колебаниям, так как этот процесс в ряде случаев мало напоминает гармонические (или квазигармонические) движения. В этом случае колебательный процесс распадается на два чередующихся и существенно отличающихся друг от друга процесса:

а) в состоянии, когда силы упругости площадки контакта почти уравниваются усилиями сопротивления движению ( $T_c$ )

$$m\ddot{\xi} = \gamma l_1 b h \ddot{\xi} \ll \frac{2bh}{kl_1} |\dot{\xi}| \approx |T_c(\dot{\xi})|. \quad (22)$$

При малых  $m$  система будет обладать небольшими ускорениями, что приводит в этих состояниях к сравнительно медленным измерениям скорости, поэтому силой инерции можно пренебречь.

б) в состоянии, при котором сила трения и сила упругости не уравниваются, то силы инерции будут очень велики, но масса площадки  $m$  в этом случае очень мала. То есть на фазовой траектории изображающая точка будет перемещаться с бесконечно большим ускорением, которое будет изменяться скачкообразно [13] (рисунок 3).



**Рисунок 3 - Зависимость скорости проскальзывания колеса по рельсу  $\dot{\xi}$  от координаты  $\xi$  при разрывных автоколебаниях**

Бесконечные ускорения идут из точек на бесконечности до точек характеристики трения [13]. То есть при изменении состояния взаимодействия скорость  $\dot{\xi}$  изменяется «скачком» при неизменном значении  $\xi$ . Другими словами, элементы рельса захватываются колесом и движутся со скоростью колеса, при этом упругие связи площадки контакта деформируются и силы упругости (и потенциальная энергия) на площадке контакта возрастают, вместе возрастает сила трения, оставаясь равной силе упругости. Когда значение силы упругости станет равным наибольшему значению силы трения, происходит скачкообразное изменение скорости площадки контакта  $\dot{\xi}$  по величине и направлению при неизменном (мгновенном) значении упругой силы. Далее происходит



непрерывное изменение скорости  $\dot{\xi}$  и координаты  $\zeta$ , пока точка контакта не перейдет в точку характеристики трения, соответствующую её минимуму.

Далее движение происходит таким же образом, точка контакта перемещается вдоль рельса, и совершаются автоколебания (разрывные) при качении колеса.

Амплитуда автоколебаний координаты  $\zeta$  может быть определена по разности максимальной и минимальной силы трения [13].

$$\xi_m = \frac{1}{2} \frac{(T_{c0} - T_{c1}) \bar{k} l}{2bh} = \frac{l}{4bh} \sqrt{\bar{k} Pr} (f_0 - f_{min}) = \frac{\Delta f l_1}{4bh} \sqrt{\bar{k} Pr}. \quad (23)$$

Для определения части периода колебаний на участке схватывания колесом точек рельса

$$t_1 = \frac{(T_{c0} - T_{c1}) \bar{k} l}{2bhv}. \quad (24)$$

Далее определим часть периода колебаний на участке проскальзывания, используя данные [9,10]

$$t_2 = - \frac{\bar{k} l}{2bh} \int_{\dot{\xi}_c}^{\dot{\xi}_{кр}} \frac{T'_c(\dot{\xi})}{\dot{\xi}} d\dot{\xi}. \quad (25)$$

Запишем выражение для силы сопротивления движению колеса без учета влияния псевдоскольжения, то есть ориентируемся на вторую гипотезу возникновения касательных сил, где отсутствуют относительные смещения

материала (или отсутствует деформационная природа возникновения касательных сил)

$$T_c = - \frac{\sqrt{\bar{k} Pr}}{\bar{k}} \left[ f_0 - \frac{3}{2} \Delta f \frac{\dot{\xi}}{\dot{\xi}_{кр}} + \frac{\Delta f}{2} \left( \frac{\dot{\xi}}{\dot{\xi}_{кр}} \right)^3 \right] \quad (26)$$

Определим пределы интегрирования, верхний предел равен  $\dot{\xi}_{кр}$ , то есть равен значению скорости проскальзывания при  $f_{min}$ , нижний предел интегрирования определим из условия

$$T_{c0}(\dot{\xi}_c) = T_{c0}. \quad (27)$$

Из выражения (26) определим

$$T_{c0} = - \frac{\sqrt{\bar{k} Pr}}{\bar{k}} \left[ f_0 - \frac{3}{2} \Delta f \frac{\dot{\xi}_c}{\dot{\xi}_{кр}} + \frac{\Delta f}{2} \left( \frac{\dot{\xi}_c}{\dot{\xi}_{кр}} \right)^3 \right]. \quad (28)$$

Тогда из (27), (28) получим

$$\frac{3}{2} \Delta f \frac{\dot{\xi}_c}{\dot{\xi}_{кр}} = \frac{\Delta f}{2} \left( \frac{\dot{\xi}_c}{\dot{\xi}_{кр}} \right)^3. \quad (29)$$

Откуда

$$3\dot{\xi}_{кр}^2 = \dot{\xi}_c^2, \quad (30)$$

$$\dot{\xi}_c = \pm \dot{\xi}_{кр} \sqrt{3}, \quad (31)$$



принимая в (31) знак +, получим  $\xi_{кр} = \frac{\sqrt{3}}{3} \xi_c$ .

Запишем выражение для производной от  $T_c$  по  $\xi$

$$T_c' = -\frac{\sqrt{k} Pr}{k} \left[ -\frac{3 \Delta f}{2 \xi_{кр}} + \frac{3}{2} \Delta f \left( \frac{\xi^2}{\xi_{кр}^3} \right) \right]. \quad (32)$$

Тогда определим второй предел интегрирования для выражения (25) и вид подинтегральной функции.

На основании изложенного (25) приобретет вид

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{1}{c} \int_{\xi_c}^{\xi_{кр}} \frac{\sqrt{k} Pr}{k} \frac{3}{2} \Delta f \left[ -\frac{1}{\xi_{кр}} + \frac{\xi^2}{\xi_{кр}^3} \right] \frac{d\xi}{\xi} = \frac{1}{c} \frac{\sqrt{k} Pr}{k} \frac{3}{2} \Delta f \int_{\xi_c}^{\xi_{кр}} \left( -\frac{1}{\xi_{кр} \cdot \xi} + \frac{\xi}{\xi_{кр}^2} \right) d\xi \\ &= \frac{3 \Delta f l}{4 b h} \sqrt{k} Pr \left[ -\frac{1}{\xi_{кр}} (\ln \xi_{кр} - \ln(\sqrt{3} \xi_{кр})) + \frac{1}{2 \xi_{кр}^3} (\xi_{кр}^3 - 3 \xi_{кр}^2) \right] = \\ &\frac{3 \Delta f l}{4 b h} \sqrt{k} Pr \left[ -\frac{1}{\xi_{кр}} (\ln \xi_{кр} - \ln \xi_{кр} - \ln \sqrt{3}) + \frac{\xi_{кр}^2}{2 \xi_{кр}^3} (1 - 3) \right] = \frac{3 \Delta f l}{4 b h} \sqrt{k} Pr \left( \frac{\ln 3}{2 \xi_{кр}} - \frac{1}{\xi_{кр}} \right) \end{aligned} \quad (33)$$

Выражение (24) для определения  $t_1$  преобразуем к виду

$$t_1 = \frac{(T_{c0} - T_{c1}) \bar{k} l}{2 b h v} = \frac{\Delta f l}{2 b h v} \sqrt{k} Pr. \quad (34)$$

Тогда полный цикл релаксационных колебаний определим из выражения

$$t_{\Sigma} = t_1 + t_2 = \frac{\Delta f l}{2 b h} \sqrt{k} Pr \left[ \frac{1}{v} + \frac{3}{2} \left( \frac{\ln 3}{\xi_{кр}} - \frac{1}{\xi_{кр}} \right) \right] = \frac{\Delta f l}{2 b h} \sqrt{k} Pr \left[ \frac{1}{v} + \frac{3}{2 \xi_{кр}} (\ln 3 - 1) \right] \quad (35)$$

При рассмотрении релаксационных колебаний участка рельса (или колеса) полученные значения амплитуды колебаний  $\xi_m$  (23) и периода колебаний  $t_{\Sigma}$  (35) выражены через дискретные величины, такие как значения коэффициентов трения  $f_0(f_{max}), f_{min}$ , геометрические размеры площадки контакта ( $l_1, b, h$ ), упругие константы  $\bar{k}(\mu, E)$ , внешнюю нагрузку  $\sqrt{P}$ , скорость движения колеса  $v$ , радиус колеса  $r$ . При этом искомая функция  $\xi = \xi(t)$  является кусочно-гладкой (непрерывной) функцией, которая на участке  $0 \leq t \leq t_1$  изменяется по линейному закону, так за время протекания этого интервала площадка контакта на рельсе движется совместно с площадкой контакта на колесе. Если обратимся к временному интервалу  $t_1 \leq t \leq t_2$ , то здесь сил трения между площадками контакта становится недостаточно для удержания пятна контакта колеса на рельсе, которое находится под воздействием сил упругости и инерции. По истечении временного интервала ( $t_1 + t_2$ ) пятно контакта колеса на рельсе будет «подхвачено» последующим элементом колеса, где сила трения будет снова уравновешена силами упругости.

Далее цикличность процесса будет многократно повторяться, пока существуют условия возникновения и поддержания релаксационных (разрывных) процессов.



В ряде случаев взаимодействия колеса и рельса имеет место «схватывание» поверхностей контакта, как это описано выше при релаксационных автоколебаниях. В других случаях контактирования колеса и рельса проявляется эффект взаимодействия без видимых остановок, при этом изменяется скорость проскальзывания между площадками и, как следствие, происходит изменение характеристики (коэффициента) трения, как функции скорости скольжения. Такие пульсации силы сопротивления движению приводят к наведению в рельсе, колесе и приводных механизмах колебаний по форме, напоминающих гармонические колебания. Как следует из [12] для моделирования таких автоколебаний достаточно воспользоваться кубической характеристикой процесса трения. Однако, согласно [12] в кубической характеристике трения присутствуют три неизвестные величины – коэффициенты  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  и критическая скорость проскальзывания  $\dot{\xi}_{кр}$  при которой реализуется  $f_{min}$ . Эти величины предлагается определять через  $f_0$  и  $f_{min}$ . Вместе с тем, без дополнительных данных по зависимости  $f = f(\dot{\xi})$  недостающие величины  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  и  $\dot{\xi}_{кр} = \sqrt{\frac{\bar{a}}{\bar{b}}}$  найти невозможно.

Поэтому предлагаем аппроксимировать характеристику по экспериментальной кривой, и поставить ей в соответствие функциональную зависимость и затем, путем разложения этой функции в ряд Маклорена (в окрестности точки  $\dot{\xi}_{кр}$ ) и ограничимся в разложении слагаемыми, пропорциональными  $\dot{\xi}$  и  $\dot{\xi}^3$ . Тогда кубическая характеристика сил трения будет иметь вид:

$$f(\dot{\xi}) = f_0 - f'(\dot{\xi}_{кр})\dot{\xi} + \frac{f'''(\dot{\xi}_{кр})\dot{\xi}^3}{6} \quad (36)$$

и коэффициенты  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  в разложении [12] запишем в виде

$$\bar{a} = f'(\dot{\xi}_{кр}); \quad \bar{b} = \frac{f'''(\dot{\xi}_{кр})}{6}.$$

В этом случае усилие сопротивления перекатыванию на основании [3] примет вид (для участка контакта на рельсе)

$$T_c = \frac{-\sqrt{8P\bar{k}r}}{2\bar{k}} \left[ f_0 - f'(\dot{\xi}_{кр})\dot{\xi} + \frac{f'''(\dot{\xi}_{кр})}{6} (\dot{\xi})^3 \right] + \frac{r}{2v} \dot{\xi} \quad (37)$$

(иначе усилие, приложенное к пятну контакта при сбегании колеса с рельса).

Тогда усилие сопротивления перекатыванию, приложенное к колесу запишем в виде

$$T_c = \frac{\sqrt{8P\bar{k}r}}{2\bar{k}} \left[ f_0 - f'(\dot{\theta}_{кр})\dot{\theta} + \frac{f'''(\dot{\theta}_{кр})}{6} \dot{\theta}^3 \right] - \frac{r}{2\omega} \dot{\theta}. \quad (38)$$

Вследствие относительных перемещений волокон бандажа и рельса, обусловленных упругостью их материалов, оказывается, что при движении колеса фактический путь, проходимый его центром не равен пути, проходимым его центром при условии абсолютно жесткого колеса. Это явление носит название псевдоскольжения по Картеру [10]. Псевдоскольжение определяем по





формулам  $\delta = \frac{v-r\dot{\varphi}}{v}$ ;  $\delta = \frac{\omega r-v}{v}$ , где  $v, r\dot{\varphi}$  – обозначение линейных скоростей обода колеса;  $\omega, \dot{\varphi}$  – угловая частота вращения колеса;  $r$  – радиус наружных точек колеса;  $\dot{\theta} = \dot{\varphi} - \omega$  – угловая скорость проскальзывания колеса.

Запишем дифференциальное уравнение автоколебаний участка рельса на контакте колесо – рельс с учетом (37)

$$\ddot{\xi} + \frac{2}{\gamma \bar{k} l_1^2} \dot{\xi} = - \frac{\sqrt{2\bar{k}\sqrt{P}}}{\gamma \bar{k} l_1 b h} \left[ f_0 - f'(\dot{\xi}_{кр}) \dot{\xi} + \frac{f'''(\dot{\xi}_{кр})}{6} (\dot{\xi})^3 \right] + \frac{r}{\gamma 2\bar{k} l_1 b h} \ddot{\xi}, \quad (39)$$

где  $l_1, b, h$  – соответственно длина, ширина и толщина элемента рельса, взаимодействующего с колесом (под  $h$  обычно понимают толщину упрочненного слоя участка контакта);

$P$  – вертикальная нагрузка на колесо;  $r$  – радиус колеса;

$f_0$  – наибольшее значение коэффициента трения;

$f_{min}$  – наименьшее значение коэффициента трения, которое он принимает при значении скорости проскальзывания между колесом и рельсом;

$\dot{\xi} = \dot{\xi}_{кр}$  – (критическое значение скорости проскальзывания) – постоянная величина.

По аналогии с (39) можно записать уравнение автоколебаний участка колеса на контакте колесо – рельс.

Рассматривая уравнение (39) полагаем, что коэффициенты при  $\dot{\xi}, (\dot{\xi})^3$  можно трактовать как малые параметры. Тогда считаем, что все слагаемые уравнения имеют один порядок малости, поэтому мы не можем пренебрегать инерционным слагаемым. Поэтому для такого случая возникновения автоколебаний считаем, что эти колебания являются квазигармоническими (то есть близкими к гармоническим собственным колебаниям системы). Отличие от гармонических колебаний будет выражаться в переменных амплитуде и начальной фазе колебаний.

Преобразуем выражение (39) к виду, удобному для применения метода малого параметра.

Для этого перейдем от переменной  $\xi$  к переменной  $q$  согласно выражению

$$q = \xi - \frac{f(\dot{\xi}_{кр})\sqrt{2\bar{k}\sqrt{P}r}bh}{\bar{k}^2\gamma l_1^2 bh} = \xi - \frac{\sqrt{2\bar{k}\sqrt{P}r}}{\bar{k}^2\gamma l_1^2} f(\dot{\xi}_{кр}). \quad (40)$$

Тогда уравнение (39) представим в виде

$$\ddot{q}_\tau + q = \left[ \frac{r}{2\bar{k}l_1^2 bh} \frac{\dot{q}_\tau}{v} + \frac{\sqrt{2\bar{k}\sqrt{P}r}}{\bar{k}\gamma l_1 bh} f'(\dot{\xi}_{кр}) \dot{q}_\tau - \frac{\sqrt{2\bar{k}\sqrt{P}r}}{\bar{k}\gamma l_1 bh} \cdot \frac{f'''(\dot{\xi}_{кр})}{6} (\dot{q}_\tau)^3 \right], \quad (41)$$

где  $c = \frac{2bh}{\bar{k}l_1}$  – продольная жесткость условной балки на контакте колесо – рельс; ( $\gamma$  – удельная масса участка контакта на рельсе или колесе);  $\omega_0$  – собственная частота продольных колебаний условной балки на контакте «колесо – рельс»;  $\tau$  – безразмерное время ( $t$  – реальное время).

В выражении (39) приняты обозначения:

$$\omega_0^2 = \frac{2bh}{\bar{k}l_1^2\gamma bh} = \frac{2b}{\bar{k}l_1^2\gamma}; \quad \tau_0 = \omega_0 t = \sqrt{\frac{2b}{\bar{k}l_1^2\gamma}} t.$$



Так как в уравнении (39) присутствуют постоянные слагаемые, то решение уравнения (41) содержит помимо общего ещё частное решение, другими словами, решение уравнения (41) ищем в виде

$$\bar{q}(\tau) = q(\tau) + q_0, \tag{42}$$

где  $q_0$  – частное решение имеет вид

$$q_0 = \frac{\sqrt{2k\sqrt{Pr}}}{k\gamma l_1 bh} f_0.$$

Тогда общее решение переменной части (39), (41) будем искать в виде

$$q(\tau) = \rho \cos(\tau - \nu), \tag{43}$$

где  $\rho = \rho(\tau)$  – переменная амплитуда колебаний;  $\nu$  – начальная фаза.

По аналогии с [14] уравнения первого приближения для определения функций  $\rho = \rho(\tau)$ ,  $\nu = \nu(\tau)$  будут иметь вид

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \Phi(\rho); \quad \frac{d\nu}{d\tau} = \psi(\rho), \tag{44}$$

где  $\Phi(\rho) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\rho \cos \xi, -\rho \sin \xi) \sin \xi d\xi$ ,

$\psi(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\rho \cos \xi, -\rho \sin \xi) \cos \xi d\xi$ ,

$F(\rho \cos \xi, -\rho \sin \xi)$  – правая часть уравнения (41) без учета постоянного слагаемого  $q_0 \left\{ q_0 = \frac{\sqrt{2k\sqrt{Pr}}}{k\gamma l_1 bh} f_0 \right\}$ .

Можно показать, что

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{d\tau} = \Phi(\rho) = -\frac{\rho}{2} \left( \alpha + \frac{3}{4} \beta \rho^2 \right) \\ \frac{d\nu}{d\rho} = \psi(\rho) = 0 \end{cases}. \tag{45}$$

Состояние равновесия для первого уравнения (45) определяется корнями уравнения

$$\rho \left( \alpha + \frac{3}{4} \beta \rho^2 \right) = 0, \tag{46}$$

откуда  $\rho_1 = 0$ ;  $\rho_2 = \sqrt{-\frac{4}{3} \frac{\alpha}{\beta}}$ ,

где  $\alpha = \frac{r}{2k\gamma^2 l_1 bh\nu} + \frac{\sqrt{2k\sqrt{Pr}}}{k\gamma l_1 bh} f'(\xi_{кр})$ ,  $\beta = -\frac{\sqrt{2k\sqrt{Pr}}}{k\gamma l_1 bh} \cdot \frac{f'''(\xi_{кр})}{6}$ .

Тогда дифференциальное уравнение для определения переменной амплитуды колебаний будет иметь вид согласно [14]

$$\dot{\rho} = \frac{\alpha}{2} - \frac{3}{4} \frac{\beta}{2} \rho^3. \tag{48}$$

Дифференциальное уравнение (48) перепишем в стандартной форме

$$2\dot{\rho} - \alpha\rho + \frac{3}{4} \beta \rho^3 = 0. \tag{49}$$



В данном уравнении разделим переменные

$$2 \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{2\rho}{(\alpha - \frac{3}{4}\beta\rho^2)\rho} = \tau, \tag{50}$$

откуда

$$\rho(t) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\frac{3}{4}\beta - (\frac{3}{4}\beta - \frac{\alpha}{\rho_0^2})e^{-\alpha\tau}}}. \tag{51}$$

Принимаем

$$\rho_0 = q_0 \tag{52}$$

в качестве начального условия для переменной амплитуды  $\rho(\tau)$ . Если устремить время в бесконечность ( $\tau \rightarrow \infty$ ), то из выражения (51) следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\tau) = \rho_{max} = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\alpha}{\beta}}, \tag{53}$$

где  $\tau=0$ ;  $\rho(t)=\rho_0$ .

Картину возбуждения колебаний можно представить следующим образом: от некоторого толчка на площадке касания возникает пробуксовка (с начальной амплитудой колебаний  $\rho_0=q_0$ , при этом возбуждаются неустановившиеся автоколебания, которые через некоторое (небольшое) время устанавливаются и превращаются в стационарные автоколебания.

Выражение (53) определяет максимальную амплитуду автоколебаний в виде корня квадратного из отношения коэффициентов выражений (46), (47), то есть выражения  $\alpha/\beta$  с учетом разных знаков. Данное отношение состоит из двух параметров.

Первый – прямо пропорционален радиусу колеса  $r$ , модулю упругости колеса  $E$  (или рельса) в степени  $\frac{1}{2}$  (через упругую константу  $\bar{k}$ ); обратно пропорционален линейной скорости центра колеса  $v$ , корню квадратному из вертикальной нагрузки и коэффициенту  $\bar{b}$  при кубе скорости проскальзывания ( $b = \frac{f'''(\xi_{кр})}{6}$ ) для характеристики трения скольжения.

Второй коэффициент пропорционален только критической скорости скольжения, то есть скорости, при которой  $f(\dot{\xi}_{кр}) = f_{min}$ , в этом случае

$$\dot{\xi}_{кр} = \sqrt{\frac{6f'(\xi)}{f'''(\xi)}} = \sqrt{\frac{\bar{a}}{3\bar{b}}}. \tag{54}$$

Таким образом, наибольшее значение амплитуды автоколебаний в развернутом виде может быть представлено следующим образом

$$\rho_m = \sqrt{8 \left[ \frac{r}{2\gamma\sqrt{2\bar{k}}\sqrt{Pr}vf'''(\xi)} + \frac{f'(\xi)_{кр}}{f'''(\xi)_{кр}} \right]}. \tag{55}$$

Из выражения (55) следует, что  $\rho_m$  не зависит от размеров площадки контакта и толщины уплотненного слоя ( $l_1, b, h$ ), при этом для колес с большим радиусом катания наблюдается увеличение  $\rho_m$  в степени  $\frac{1}{4}$ , кроме того, рост вертикальной нагрузки на колесо  $P$  способствует снижению амплитуды



автоколебаний  $\rho_m$  в степени  $1/4$ . Также отметим влияние на  $\rho_m$  характеристики трения  $f(\dot{\xi}_{кр})$  в точке, соответствующей критической скорости проскальзывания  $\dot{\xi}_{кр}$ .

Для получения деформационного смещения участка контакта перейдем к старой координате  $\zeta(t)$

$$\zeta(t) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\frac{3}{4}\beta - (\frac{3}{4}\beta - \frac{\alpha}{\rho_0^2})e^{-\alpha\omega_0 t}}} \cdot \cos\omega_0 t + \frac{\sqrt{2k\sqrt{Pr}}}{k\gamma l_1 b h} f_0 + \frac{\sqrt{2k\sqrt{Pr}}}{\gamma k^2 l_1^2} f(\dot{\xi}_{кр}) \quad (56)$$

Обратимся к выражению, описывающему вибрационное смещение участка контакта (56) колеса и рельса, который теоретически представляет эллиптический участок, приобретающий при прирабатывании колеса и рельса прямоугольную форму со сторонами  $a$ ,  $b$  и толщиной  $h$ , указанный участок примыкает по длине большой оси эллипса к свободным от нагрузок элементам по длине рельса с помощью продольных связей, имеющих продольную жесткость  $c$ .

В силу того, что рассматриваемый участок контакта является растянутым и нагруженным вертикальной нагрузкой, то мы пренебрегаем его вертикальными связями с внутренними слоями, расположенными на глубине рельса  $\delta > h$ .

Также для участка контакта принимаем, что диссипативные потери при перекачивании колеса (совокупности колес) по рельсу являются «малыми» и на первом этапе рассмотрения сила диссипации, отнесенная к массе участка контакта, является малым параметром и её влиянием на автоколебательный процесс пренебрегаем.

Рассмотрим структуру выражения (56) для перемещения  $\zeta(t)$ , оно состоит из трех составляющих.

Обратимся к первому слагаемому, судя по его виду, оно описывает автоколебательный процесс, происходящий по квазигармоническому закону с собственной частотой колебаний участка контакта колеса и рельса и переменной амплитудой. При этом начальная фаза колебаний, согласно [14], также является малым параметром и поэтому, пренебрегая слагаемым в уравнении (39), содержащим скорость скольжения (и малый параметр), а также начальную фазу, мы не вносим существенных погрешностей в уравнение (39) и его решение (56).

Второе слагаемое выражения (56) представляет собой частное решение уравнения (39) в предположении, что площадка нагружена постоянным растягивающим усилием  $T_0$ , а также вертикальным усилием  $\sqrt{P}$ , при действии на площадке контакта коэффициента трения покоя  $f_0$ .

Третье слагаемое представляет собой постоянную составляющую, обусловленную обратной заменой переменной  $\tau$  на исходную переменную  $t$ . Эта составляющая пропорциональна вертикальному усилию  $\sqrt{P}$  при действии на площадке контакта коэффициента трения скольжения  $f(\dot{\xi}_{кр}) = f_{min}$ .

Относительно постоянных коэффициентов выражения (56) установлено следующее – коэффициент  $\alpha$  обратно пропорционален линейной скорости оси колеса (колесной пары)  $v$  и прямо пропорционален производной от функции



трения в точке  $\xi_{кр}$ , формула (47), влияние других параметров на  $\alpha$  и  $\beta$  не существенно, так как решающее значение имеет отношение (53).

Приведенное выражение (56) может быть непосредственно использовано при определении касательного усилия, передаваемого от колеса рельсу (37).

Однако, в результате дифференцирования (56) и дальнейших преобразований, конечный результат становится громоздким.

Кроме того, при решении уравнения (41) был использован метод Ван дер Поля (метод медленно изменяющихся амплитуд), согласно которому на периодическое решение  $\xi(t)$  накладываются дополнительные условия [8], [14], использование которых позволяет получить скорость скольжения двух площадок контакта в виде

$$\dot{\xi}(t) = -A(t)\omega_0 \sin(\omega_0 t + \nu), \tag{57}$$

где  $A(t) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\frac{3}{4}\beta - (\frac{3}{4}\beta - \frac{\alpha}{\rho_0^2})e^{-\alpha t}}}$  – переменная амплитуда автоколебаний;

$\nu$  – начальная фаза автоколебаний, постоянная величина, которая для условий данной задачи принята равной нулю.

При таком подходе и для дальнейших выкладок с использованием выражения для  $T_c$  тоже получим громоздкий результат.

Далее обратимся к методу малого параметра при рассмотрении и анализе уравнений (12), (21). Так как масса участка контакта на каждой из контактирующих деталей будет незначительной, то будем считать её малым параметром  $\mu$  при старшей производной  $\mu = \gamma l_1 b h$ , тогда вместо уравнения (12) или (21) будем иметь

$$c\xi(t) = T_c(\dot{\xi}), \tag{58}$$

то есть в уравнении (12) или (21) пренебрегаем инерционной составляющей.

Отсюда, для того чтобы получить усилие перекачиванию колеса достаточно выражение (56) умножить на жесткость наружных слоев площадки контакта (как для рельса, так и для колеса)  $c = \frac{2bh}{\bar{k}l_1}$ , тогда получим (или в виде (63))

$$T_c = \frac{2bh}{\bar{k}l_1} \cdot \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\frac{3}{4}\beta - (\frac{3}{4}\beta - \frac{\alpha}{\rho_0^2})e^{-\alpha\omega_0 t}}} \cdot \cos\omega_0 t + \frac{2\sqrt{2\bar{k}\sqrt{Pr}bh}}{\gamma\bar{k}^2 l_1^2 bh} f_0 + \frac{\sqrt{2\bar{k}\sqrt{Pr}2bh}}{\gamma\bar{k}^3 l_1^3} f_{min} \tag{59}$$

Введем обозначения

$$T_1 = \frac{2bh}{\bar{k}l_1} \cdot \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\frac{3}{4}\beta - (\frac{3}{4}\beta - \frac{\alpha}{\rho_0^2})e^{-\alpha\omega_0 t}}}; \tag{60}$$

$$T_0 = T_2 + T_3 = \frac{2\sqrt{2\bar{k}\sqrt{Pr}}}{\gamma\bar{k}^2 l_1^2} f_0 + \frac{2\sqrt{2\bar{k}\sqrt{Pr}}}{\gamma\bar{k}^3 l_1^3}. \tag{61}$$

Таким образом, касательная нагрузка, приложенная к площадке контакта



колеса и рельса, а также впереди гребня на рельсе, образованного набегающим колесом (или аналогичного гребня на колесе) может быть представлена как параметрическая нагрузка в форме Матье-Хилла в виде

$$T_c = T_1(t)\cos\omega_0 t + T_0 \quad (62)$$

$$\text{или } T_c = T_1\cos\omega_0 t + T_0, \quad (63)$$

если считать для некоторого короткого промежутка времени  $T_1 = const$ .

Отметим, что амплитудное значение  $T_1$  совпадает по величине  $\rho_m$  с точностью до постоянного множителя и при этом не зависит от размеров площадки контакта и толщины уплотненного слоя. Судя по формулам (55), (60) определяющими факторами для увеличения  $\rho_m$  являются:  $\sqrt{r}$ ,  $\sqrt{E}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{P}}$ ,  $v$ , а также составляющие элементы характеристики трения. Величины  $\sqrt{r}$ ,  $\sqrt{E}$  являются заданными, скорость  $v$  (состава) изменяется в широких пределах и только нагрузкой на колесо  $\frac{1}{\sqrt{P}}$  можно уменьшить амплитуды автоколебаний ведущих колес, а также повысить работоспособность пары колесо – рельс за счет поверхностного упрочнения наружных слоев взаимодействующих деталей.

Рассмотрим механику деформационных процессов на рельсе в области, расположенной впереди катящегося колеса. Представим, что сила сопротивления перекатыванию  $T_c$  «соскочив» с площадки контакта, передается на деформационный гребень, расположенный впереди точки взаимодействия колеса и рельса. При этом существует два подхода к определению части усилия  $T_c$ , передаваемого на деформационный гребень

I – усилие на гребне зависит от растяжения площадки контакта  $\Delta l_1$  и сжатия участка рельса, опережающего деформационный гребень  $\Delta l_2$ , принимаем равным приращению длины участка контакта  $\Delta l_1 = \Delta l_2$ .

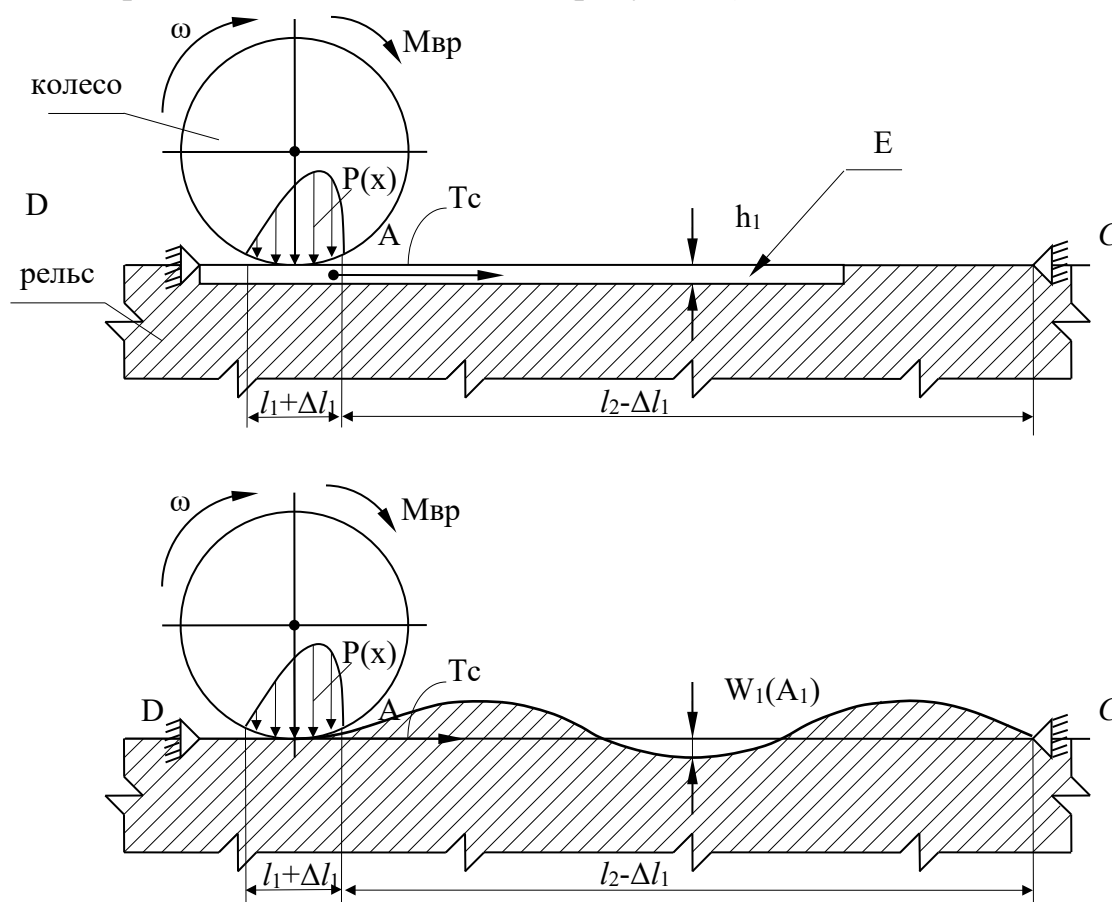
II – усилие  $T_c$  полностью передается деформационному гребню, исходя из предположения, что незначительная часть  $T_c$  вызывает растяжение участка контакта, а превалирующая его часть вызывает сжатие поверхностных слоев материала впереди гребня (остановимся на II подходе). При движении колеса образовавшаяся деформационная волна перемещается вдоль рельса со скоростью  $v$  колеса (экипажа).

Рассматриваемый рельсовый путь схематизирован в виде анизотропной среды, представленной тонким поверхностным слоем, соединенным упругими связями (в основном вертикальными) с менее прочной сердцевиной. Как следует из работы [15] поверхностные деформационные эффекты проявляются в тонких наружных слоях, поэтому расчетная схема задачи представлена в виде деформированного поверхностного слоя, опирающегося на упругое основание и нагруженного продольной (параметрической) нагрузкой  $T_c$ , формула (59) или (62). Поверхностный слой толщиной  $h$  под действием нагрузки  $T_c$  претерпевает потерю продольной устойчивости, как для случая балки с упругим Винклеровым основанием [16].

Если считать нагрузку  $T_c$ , приложенной к гребню на рельсе, то она приводит к волнообразным деформациям поверхностных слоев, которые могут принимать



упругий и неупругий характер. То есть волна деформации с несколькими гребнями опережает набегающее колесо (рисунок 4).



**Рисунок 4 - К деформированию поверхности слоев рельса вперед набегающего колеса**

Е – поверхностный слой рельса в виде балки на упругом основании;

Н – толщина балки;

D, A, C – условные опоры балки

Эта волна находится в подвижном состоянии (бегущая волна), причем длина этого участка и количество полуволн деформации пока остаются неизвестными. Для определения длины деформационных поверхностных слоев рельса используем подход, примененный в работе [17]. В работе показано, что, если  $T_c \geq T_{кр}$ , то форма поверхностных слоев приобретает вид синусоидальной кривой («остаточной» волновой поверхности). В случае, когда  $T_c$  несколько меньше  $T_{кр}$  ( $T_c < T_{кр}$ ), то волнообразование тоже происходит, при этом деформации поверхностных слоев не будут остаточными.

Для определения величин  $l_2$ ,  $k$  длины деформированного участка и количество полуволн будем исходить из результатов работ [15], [16], [17]. Как следует из [16] жесткость упругого основания связана с длиной балки, потерявшей упругую устойчивость, и числом полуволн. Далее используем уравнение продольного изгиба поверхностных слоев [17], из которого определим критическую силу  $T_{кр}$ . Это уравнение будет иметь вид

$$E_n I \frac{d^4 w}{dx^4} + T_{кр} \frac{d^2 w}{dx^2} + \beta w = 0. \quad (64)$$



$$\text{Решение (64) ищем в виде } w(x) = w_k \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (65)$$

После подстановки (65) в уравнение (64) получим

$$E_n I \frac{k^4 \pi^4}{l^4} w_k \sin \frac{k\pi x}{l} - T_{кр} \frac{k^2 \pi^2}{l^2} w_k \sin \frac{k\pi x}{l} + \beta w_k \sin \frac{k\pi x}{l} = 0, \quad (66)$$

Откуда критическая сила будет равна

$$T_{кр} = E_n I \frac{k^2 \pi^2}{l^2} + \frac{\beta l^2}{k^2 \pi^2} = E_n I \frac{k^2 \pi^2}{l^2} + \frac{E k \pi}{2 l k^2 \pi^2}. \quad (67)$$

В приведенных выражениях (64), (65), (66)

$w_k$  – амплитудные значения прогибов для различных форм потери устойчивости;

$w(x)$  – форма прогибов поверхностных слоев рельса, которые опираются на внутренние слои материала рельса;

$T_{кр} = T_0$  – установившееся значение продольной оси, близкое к своему критическому значению;

$\bar{\beta} = \frac{E \bar{\alpha}}{2}$  – жесткость внутренних слоев материала (представленного как упругое основание);

$E$  – модуль упругости основания;

$\bar{\alpha} = \frac{k\pi}{l}$  – число полуволин деформации на участке рельса длиной  $\pi$ ;

$k$  – число полуволин на участке деформированного рельса длиной  $l$ ;

Величины  $l, k, \bar{\alpha}$  – подлежат определению.

С другой стороны, критическая сила связана с количеством полуволин на изогнутой поверхности наружных слоев рельса по аналогии с работой [16].

В работе [17] получено соотношение между длиной деформационного участка и количеством полуволин

$$l^3 = k^3 \pi^3 \frac{2E_n I}{E} + k^2 \pi^2 \frac{4E_n I}{E} k. \quad (68)$$

Также в работе [17] получено выражение для определения количества полуволин  $k$  на участке рельса длиной  $l$

$$k = \frac{l}{\pi} \sqrt[3]{\frac{E}{4E_n I}}, \quad (69)$$

где  $E_n$  – модуль упругости поверхностных слоев рельса;

$I = \frac{bh^3}{12}$  – момент инерции поперечного сечения наружных (поверхностных) слоев рельса;

$b$  – ширина поверхностных слоев рельса (часто принимается равной ширине площадки контакта колеса и рельса или принимается балка-полоска единичной ширины,  $b = 1$ );

$h$  – высота балки-полоски из деформированных поверхностных слоев.

Как было установлено [15], для балок на упругом основании критическая сила связывается с числом полуволин на деформированной поверхности наружных слоев рельса. Приравнивая выражение (67) к выражению критической силы, составленному относительно числа полуволин на деформированном





участке рельса, получим следующее выражение

$$\frac{k^2 \pi^2}{l^2} + \frac{E}{2E_n I} \frac{l}{k \pi} = \frac{2k^2 \pi^2}{l^2} + \frac{2k \pi^2}{l^2} + \frac{\pi^2}{l^2}, \quad (70)$$

$$\frac{E}{(2E_n I) k \pi} l^3 = k^2 \pi^2 + 2k \pi^2 + \pi^2, \quad (71)$$

$$\text{Тогда } l^3 = k^2 \pi^2 \cdot k \pi \frac{2E_n I}{E} + 2k^2 \pi^3 \frac{2E_n I}{E} + k \pi^3 \frac{2E_n I}{E}. \quad (72)$$

Используя соотношения  $\bar{\alpha} = \frac{k \pi}{l}$ ;  $\bar{\beta} = \frac{E \bar{\alpha}}{2}$ , а также выражение

$$k = \frac{l}{\pi} \sqrt[3]{\frac{E}{4E_n I}}, \quad (73)$$

связывающее длину деформированного участка балки-полоски с количеством полуволн деформации [16], представим выражение (72)

$$l^3 = \frac{l^3}{2} \left( \sqrt[3]{\frac{E}{4E_n I}} \right)^3 \frac{4E_n I}{E} + 4 \pi l^2 \left( \sqrt[3]{\frac{E}{4E_n I}} \right)^2 \frac{E_n I}{E} + \pi l^3 \sqrt[3]{\frac{E}{4E_n I}} \frac{2E_n I}{E} \quad (74)$$

$$l^2 - \pi l \left( \sqrt[3]{\frac{E}{4E_n I}} \right)^2 \frac{4E_n I}{E} - \pi^2 \sqrt[3]{\frac{E}{4E_n I}} \cdot \frac{4E_n I}{E} = 0. \quad (75)$$

$$l_0 \equiv 0;$$

$$l_{1,2} = \frac{\pi}{2} \left( \sqrt[3]{\frac{E}{4E_n I}} \right)^2 \frac{4E_n I}{E} \pm \sqrt{\frac{\pi^2}{4} \left( \sqrt[3]{\frac{E}{4E_n I}} \right)^4 \frac{16E_n^2 I^2}{E^2} + \pi^2 \sqrt[3]{\frac{E}{4E_n I}} \cdot \frac{4E_n I}{E}};$$

$$l_{1,2} = \pi \left( \sqrt[3]{\frac{E}{4E_n I}} \right)^2 \frac{4E_n I}{E} \pm \pi \sqrt{\frac{1}{4} \sqrt[3]{\frac{E}{4E_n I}} \frac{4E_n I}{E} + \sqrt[3]{\frac{E}{4E_n I}} \frac{4E_n I}{E}};$$

$$l_{1,2} = \pi \sqrt[3]{\frac{4E_n I}{E}} \pm \pi \sqrt{2 \left( \sqrt[3]{\frac{4E_n I}{E}} \right)^2} = \pi (1 \pm \sqrt{2}) \sqrt[3]{\frac{4E_n I}{E}}. \quad (76)$$

Таким образом, получим один корень ( $l_2$ ), который удовлетворяет условию задачи

$$l_2 = \pi (1 + \sqrt{2}) \sqrt[3]{\frac{4E_n I}{E}}. \quad (77)$$

Обратимся к выражению (77), тогда число полуволн деформации на участке рельса, потерявшего продольную устойчивость в своих верхних слоях, будет равно

$$k = \frac{\pi (1 + \sqrt{2})}{\pi} \sqrt[3]{\frac{4E_n I}{E}} \sqrt[3]{\frac{E}{4E_n I}} = 1 + \sqrt{2}. \quad (78)$$

Следовательно, число полуволн впереди катящегося колеса не зависит от нагрузки, площади поперечного сечения балки-полоски и других факторов.

Рассмотрим зависимость длины деформированного участка рельса от



нагрузки и механических свойств слоя, подставив сначала в формулу (76) выражение для момента инерции прямоугольного поперечного сечения балки-полоски в её поверхностных слоях толщиной  $h_1$ , определяемой из приближенного выражения

$$h_1 = \sqrt{\frac{P}{\sigma_T}}, \quad (79)$$

где  $P$  – вертикальная нагрузка на колесо (сосредоточенная или распределенная по ширине площадки контакта);

$\sigma_T$  – предел текучести материала рельса (или бандажа колеса), величина, изменяющаяся под воздействием возрастающей нагрузки  $P$ , или в результате увеличивающегося количества циклов прохождения колес по рассматриваемому участку рельса.

Как следует из [5], [15] нагрузки, например, по линейному закону способствует росту  $\sigma_T$  в степени меньше единицы. Этим объясняется то, что с ростом нагрузки  $P$ , происходит плавное увеличение толщины уплотненного слоя рельса (и колеса) и, как следствие, увеличение усталостной прочности контактирующей пары. То есть под действием возрастающей сжимающей нагрузки на колесо и рельс глубина упрочненного слоя изменяется в широких пределах и достигает 25 мм и более, при этом микротвердость увеличивается на 20 – 50% и предел усталости материала колеса и рельса повышается до 80% и более.

Возникающая продольная волна при качении колеса по рельсу на 2,5 полупериода опережает точку контактирования колеса с гребнем волны на рельсе (её передний фронт) и формирует остаточные деформации, опережающие переднюю точку взаимодействия подвижной пары, которые сглаживаются после повторного прохождения колес по деформированным участкам колеса, что наглядно просматриваются при наблюдении за состоянием железнодорожных и трамвайных путей. Аналогичные процессы имеют место при протекании технологических процессов прокатки (холодной) и обкатки (накатки). Поэтому умеренное повышение давления на колесо, в пределах 20 – 25%, может привести к реальному повышению долговечности пары колесо – рельс в результате повышения пределов усталости материалов деталей. При этом чрезмерное увеличение давления может способствовать перенаклепу поверхности и её последующему разрушению [5].

Пока остался открытым важный вопрос об образовании волнистой поверхности впереди движущегося колеса и определения амплитуды деформационной волны. Для этого обратимся к уравнению деформации (64), согласно которому рассматриваем с учетом укорочения длины балки-полоски  $l$  на величину  $\Delta l_1$  при однородных граничных условиях.

Для определения амплитуды квазистатической волны деформации при продольно-поперечном изгибе уплотненных поверхностных слоев будем исходить из того, что касательное усилие  $T_c$ , приложенное в зоне взаимодействия колеса с рельсом, растягивает площадку контакта (размером  $a \times b$ ) и сжимает участок рельса перед набегающим колесом (длиной  $l_2$ ). Если исходить из



неразрывности деформаций, то растянутый участок удлинится на величину  $\Delta l_1$ , а сжатый укоротится на величину  $\Delta l_1$  ( $\Delta l_1 = \Delta l_2$ ), и на длине  $l_2$  приобретет волнистую поверхность, тогда удлинение площадки контакта ( $a=l_1$ ) будет равно

$$\Delta l_1 = \frac{T_c a}{E_n F}, \quad (80)$$

где  $T_c \geq T_{кр}$  – касательная нагрузка, приложенная к рельсу и ненамного превышает критическую силу для уплотненных поверхностных слоев;  $a=l_1$  – длина участка контакта между колесом и рельсом (длина большой полуоси эллиптической площадки контакта);  $E_n$  – модуль Юнга для поверхностных слоев;  $F=bh$  – площадь поперечного сечения балки-полоски (ее наружных слоев).

Рассматривая участок рельса перед гребнем ( $l_2$ ), считаем, что в силу совместности деформаций участков  $l_1$  и  $l_2$  последний сожмется на ту же величину  $\Delta l_1$ , при этом форма его сжатой поверхности в продольном сечении приобретет вид синусоиды [17]

$$y = A_1 \sin \frac{k\pi x}{l_2}, \quad (81)$$

где  $A_1$  – амплитуда волны деформации поверхностных слоев, которая подлежит определению;  $k$  – количество полуволн деформации, которое соответствует форме потери устойчивости (минимальная критическая сила  $min T_{кр}$  соответствует  $k = 1$ ).

Как было установлено, длина деформированного участка впереди катящегося колеса, определяется по формуле (77) и зависит от соотношения модулей упругости поверхностных и глубинных слоев материала и поперечных размеров гипотетической балки, нагруженной продольной силой и, получившей помимо продольных, еще и изгибные деформации (в виде одной полуволны синусоиды) с амплитудным значением  $A_1$ . Исходя из работы балки на устойчивость в работе [17] установлено, что продольное перемещение через величины  $A_1$  и  $l$  выражается в форме

$$\Delta l_1 = \frac{\pi^2 A_1^2}{4l_1} + \frac{3}{64} \frac{\pi^4 A_1^4}{l_1^3} + \dots \quad (82)$$

Формула выведена исходя из взаимосвязи между продольными и поперечными перемещениями подвижного конца гипотетической балки при определении длины дуги деформационной волны в результате разложения подинтегрального выражения для  $\Delta l_1$  в ряд согласно биному Ньютона. (В разложении ограничимся двумя слагаемыми, содержащими  $A_1^2, A_1^4$ ).

Приравняв правые части выражений (80), (82) получим зависимость

$$\frac{3}{64} \frac{\pi^4}{l^3} A_1^4 + \frac{\pi^2}{4l} A_1^2 = \frac{T_1 a}{E_n F}. \quad (83)$$

Преобразуя (83), получаем биквадратное уравнение для определения амплитуды деформационной волны впереди катящегося колеса

$$A_1^4 + \frac{16}{3} \frac{l^2}{\pi^2} A_1^2 - \frac{64}{3} \frac{l^3}{\pi^4} \frac{T_1 a}{E_n F} = 0. \quad (84)$$



Решение (84) ищем, исходя из вспомогательного квадратного уравнения

$$B^2 + \frac{16}{3} \frac{l^2}{\pi^2} B - \frac{64}{3} \frac{l^3}{\pi^4} \frac{T_1 a}{E_n F} = 0. \quad (85)$$

Уравнение (85) допускает решение

$$B_{1,2} = -\frac{8}{3} \frac{l^2}{\pi^2} \pm \sqrt{\frac{64}{9} \frac{l^4}{\pi^4} + \frac{64}{3} \frac{l^3}{\pi^4} \frac{T_1 a}{E_n F}}. \quad (86)$$

Принимаем корень  $B_1 > 0$ , тогда амплитуду  $A_1$  определяем из выражения

$$A_1 = \sqrt{-\frac{8}{3} \frac{l^2}{\pi^2} + \sqrt{\frac{64}{9} \frac{l^4}{\pi^4} + \frac{64}{3} \frac{l^3}{\pi^4} \frac{T_1 a}{E_n F}}}. \quad (87)$$

То есть биквадратное уравнение для амплитуд допускает единственное положительное решение.

В приведенных выражениях (81) – (87)

$l = \pi(1 + \sqrt{2})^3 \sqrt{\frac{4E_n}{E} \frac{bh^3}{12}}$  – длина деформированного участка рельса;

$F = bh$  – площадь поперечного сечения гипотетической балки;

$T_c$  – касательное усилие при взаимодействии колеса и рельса ( $T_c \geq T_{кр}$ , формула (67) (для критической силы балки на упругом основании);

$a = \sqrt{8kPr}$  – длина площадки контакта колеса и рельса.

Для небольших поперечных прогибов, если действующее касательное усилие не намного превышает  $T_{кр}$ , что имеет место при продольном изгибе поверхностных слоев рельсов, можно при определении амплитуд изгибных деформаций пренебречь в (83) слагаемым, содержащим  $A_1^4$ , тогда приближенная формула для вычисления амплитуд примет вид

$$A_1 = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{T_1 l}{E_n F}}. \quad (88)$$

В работе [18] получено выражение для определения продольного перемещения свободного конца балки в предположении, что поверхностные слои балки изогнуты по одной полуволне синусоиды, выражение (82). Если считать, что деформация поверхностных слоев произошла по  $k$  полуволнам синусоиды, то вместо выражения (83) получим

$$\frac{3}{64} \frac{k^4 \pi^4}{l^3} A_1^4 + \frac{k^2 \pi^2}{4l} A_1^2 = \Delta l_1. \quad (89)$$

Подставим в выражение (89) вместо его значение (73), то будем иметь

$$\frac{3}{64} \frac{l^4 \pi^4}{\pi^4 l^3} \sqrt{\left(\frac{E}{4E_n l}\right)^4} A_1^4 + \frac{l^2 \pi^2}{4\pi^2 l} \sqrt{\left(\frac{E}{4E_n l}\right)^2} A_1^2 = \Delta l_1. \quad (90)$$



Выразив  $l$  через  $k$  получим

$$\frac{3}{64} A_1^4 k^3 \sqrt{\frac{4E_n I}{E}} \sqrt{\left(\frac{E}{4E_n I}\right)^4} + \frac{A_1^2 k^3 \sqrt{\frac{4E_n I}{E}} \sqrt{\left(\frac{E}{4E_n I}\right)^2} = \Delta l_1. \quad (91)$$

$$\frac{3}{64} k^3 \sqrt{\left(\frac{E}{4E_n I}\right)^3} A_1^4 + \frac{k^3 \sqrt{\frac{E}{4E_n I}} A_1^2 - \Delta l_1 = 0. \quad (92)$$

Тогда биквадратное уравнение для определения амплитуды деформации поверхностных слоев рельса запишем в виде

$$A_1^4 + \frac{16}{3} \sqrt{\left(\frac{4E_n I}{E}\right)^2} A_1^2 - \frac{T_1 a}{E_n F} \frac{256}{3k} \frac{E_n I}{E} = 0. \quad (93)$$

Откуда квадрат положительного значения корня выражения (93) получим в виде

$$B_1 = -\frac{8}{3} \sqrt{\left(\frac{4E_n I}{E}\right)^2} + \sqrt{\frac{64}{9} \sqrt{\left(\frac{4E_n I}{E}\right)^4} + \frac{T_1 a}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{I}{FE} \cdot \frac{256}{3}}, \quad (94)$$

где  $k$  – число полуволн деформации, принято равным  $k = 1 + \sqrt{2}$ .

Окончательно значение амплитуды волны деформации поверхностных слоев представим в виде

$$A = + \sqrt{-\frac{8}{3} \sqrt{\left(\frac{4E_n I}{E}\right)^2} + \sqrt{\frac{64}{9} \sqrt{\left(\frac{4E_n I}{E}\right)^4} + \frac{T_1 a}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{I}{FE} \cdot \frac{256}{3}}}. \quad (95)$$

Таким образом, значение амплитуды поперечных деформаций поверхностных слоев рельса (или колеса) прямо пропорционально корню четвертой степени из касательного усилия  $T_1$  и длины площадки контакта между колесом и рельсом  $a$ , прямо пропорционально корню квадратному из толщины поверхностного слоя  $h$ , обратно пропорционально корню четвертой степени из величины модуля упругости внутренних слоев рельса (или колеса), в зависимости от постановки задачи (для колеса или рельса).

Рассматривая нагружение поверхностных слоев рельса (или колеса) усилиями, которые обеспечивают потерю местной устойчивости поверхностных слоев, получены зависимости для определения критических сжимающих усилий, длины участка потери местной устойчивости поверхностных слоев, количества полуволн деформации на этой длине, амплитуды деформации балки-полоски. Причем, полученные величины выражены через критическую силу, размеры площадки контакта колеса и рельса, длину, ширину и толщину балки-полоски, модули упругости для поверхностных и внутренних слоев деталей (рельса и обода колеса).

Указанные величины рассчитаны исходя из статического характера действия касательных нагрузок.

Обратимся к поверхностным слоям рельса. Эти слои нагружены



касательной силой  $T_c$ , которая направлена вдоль рельса и может способствовать возникновению двух движений деформационной волны:

1) Статическая деформационная волна перемещается вдоль рельса с линейной скоростью движения колеса (экипажа) (более точно – квазистатическая).

2) Динамическая деформационная волна, которая накладывается на статическую за счет проявления фрикционной нестационарной составляющей касательного усилия  $T_c$ .

Как следует из двойственного характера касательных нагрузок, которые формируются на площадке контакта колеса и рельса, при взаимном проскальзывании контактирующей пары, расчетная касательная нагрузка  $T_c$  ( $T_{кр}$ ) с наложенными самовозбуждающимися колебаниями для деформированного участка рельса является параметрической нагрузкой. Эта нагрузка может привести к раскочке параметрических колебаний и проявления параметрического резонанса на переменном плече, равном изменяющемуся поперечному прогибу рассматриваемой балки-полоски.

В силу того, что статическое состояние такой балки является неустойчивым, то под воздействием взаимного проскальзывания и псевдоскольжения контактирующих деталей при переменном трении возникают автоколебания на участке контакта, которые приводят к нарастающим параметрическим колебаниям (в том числе и к параметрическому резонансу) на участке рельса длиной  $l$  впереди набегающего колеса.

Рассматривая дифференциальное уравнение самовозбуждающихся колебаний, получаем выражение для виброперемещений площадки контакта. После дифференцирования выражения (56) по времени и подстановки его в (37) получаем выражение для касательного усилия  $T_c$ . Из анализа выражений (37), (38), (63) следует, что функция  $T_c$  является периодической. Гармонической функцию можно условно считать, если амплитуда автоколебаний является медленно изменяющейся функцией, и скорость движения экипажа в рассматриваемом временном интервале может быть принята постоянной. Представленные выражения для  $T_c$  используем для составления уравнения параметрических колебаний тонкого слоя рельса впереди движущегося колеса относительно подвижной системы координат (где продольная координата перемещается совместно с началом системы отсчета  $O_1$  со скоростью экипажа  $v$ ).

Составим дифференциальное уравнение колебаний условной балки, перемещающейся вместе с опорами балки-полоски конечной длины  $l$ , нагруженной переменной силой сопротивления перекатыванию  $T_c$ , согласно (37), причем балка ещё дополнительно опирается на упругое основание внутренних слоев с коэффициентом отпора  $\bar{\beta} = \frac{E\bar{\alpha}}{2}$  (рис.4).

Реактивное усилие от упругого основания внутренних слоев рельса пропорционально упругой (вертикальной) просадке балки-полоски ( $w$ ).

Для того, чтобы в уравнение продольного изгиба балки-полоски ввести распределенную нагрузку в виде отпора упругого основания [8], его необходимо дважды продифференцировать по продольной координате. Балку-полоску



считаем системой инерционной, поэтому в уравнение введем еще и силы инерции, тогда будем иметь

$$E_n I \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + T_c [\dot{\xi}(t)] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{E \bar{\alpha}}{2} w + m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (96)$$

с учетом граничных и начальных условий

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial w(x_0, 0)}{\partial t} = v_0, \quad (97)$$

где  $\bar{\alpha} = \sqrt[3]{\frac{E}{4E_n I}}$  – число полуволн балки-полоски на участке балки длиной  $\pi$ ;

$x_0$  – некоторое значение  $x$  из интервала  $0 \leq x_0 \leq l$ ;

$\xi(t)$ ,  $\dot{\xi}(t)$  – соответственно относительное смещение деталей пары при контакте и скорость этого смещения;

$m_0$  – погонная масса по длине балки-полоски (толщиной  $h_1$ ).

Если считать

$$w = w(x, t) = A_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (98)$$

где  $w$  – поперечный прогиб балки-полоски, переменный во времени и по длине балки, тогда (96) приводится к виду

$$m_0 \frac{d^2 A_k}{dt^2} + E_n I \frac{k^4 \pi^4}{l^4} A_k + T_c [\dot{\xi}(t)] \frac{k^2 \pi^2}{l^2} A_k + \frac{E}{2} \alpha A_k = 0. \quad (99)$$

Так как уравнения (99) идентичны для всех форм колебаний при любых  $k$ , то в разложении (98) для прогибов достаточно ограничиться первой формой потери устойчивости, поэтому индекс  $k$  может быть в дальнейшем опущен (в нашем случае принимаем  $k = 1$ ). Кроме  $A_k$  это касается  $\mu_k$ ,  $\Omega_k$ .

Если касательную нагрузку  $T_c$  на основании (37), (63) можно представить изменяющейся по гармоническому закону

$$T_c = T_0 + T_1 \cos \theta t, \quad (100)$$

то уравнение (99) может быть приведено к виду

$$\frac{d^2 A_k}{dt^2} + \omega_k^2 \left( 1 - \frac{T_0 + T_1 \cos \theta t}{T_k^*} \right) A_k = 0, \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (101)$$

где  $\omega_k^2 = \frac{1}{m_0} \left( \frac{k^4 \pi^4}{l^4} E_n I + \bar{\beta} \right)$  – квадрат  $k$ -ой частоты колебаний незагруженной балки-полоски ( $l \times b \times h$ ) с индексом  $k$ ;  $T_0$  – постоянная составляющая касательной силы;  $T_k^* = \frac{k^2 \pi^2 E I}{l^2} + \frac{\bar{\beta} l^2}{k^2 \pi^2}$  – значение критической касательной силы для формы потери устойчивости с индексом  $k$ ;  $\bar{\beta} = \frac{E \bar{\alpha}}{2}$  – коэффициент отпора (жесткость) упругого основания;  $T_1$  – амплитуда колебаний касательной силы.

Введем обозначения:

$$\Omega_k = \omega_k \sqrt{1 - \frac{T_0}{T_k^*}} \quad (102)$$

– частота собственных колебаний балки-полоски, нагруженной постоянной составляющей касательной силы (для формы колебаний с индексом  $k$ );



$$\mu_k = \frac{T_t}{2(T_k^* - T_0)} \quad (103)$$

- коэффициент возбуждения нагрузки, которой для многих систем является малым параметром [14].

Тогда уравнение (101) преобразуется к виду:

$$\frac{d^2 A_k}{dt^2} + \Omega_k^2 (1 - 2\mu_k \cos \theta t) A_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3 \dots). \quad (104)$$

Опуская индексы  $k$ , при этом считаем  $k = 1$ .

$$A_1'' + \Omega_1^2 (1 - 2\mu_1 \cos \theta t) A_1 = 0. \quad (105)$$

Уравнение (105) является уравнением Матье, которое описывает прохождение наложенных параметрических колебаний на деформированный поверхностный слой рельса.

В случае, когда касательная сила изменяется по более общему закону

$$T_c = T_0 + T_1 \Phi(t), \quad (106)$$

где  $\Phi(t)$  – периодическая сила с периодом  $\frac{2\pi}{\theta}$ , тогда вместо уравнения (105) приходим к уравнению

$$A_1'' + \Omega_1^2 (1 - 2\mu_1 \Phi(t)) A_1 = 0 \quad (107)$$

более общего вида, которое называется уравнением Матье-Хилла.

Так как функция  $T_c$  состоит из постоянной и переменной частей, где  $T_0$  представляет собой постоянную часть параметрической нагрузки, под воздействием которой нагруженные слои балки-полоски являются сжатой (относительно тонкой) балкой на упругом основании, которая может потерять продольную устойчивость, а переменная составляющая внешней касательной нагрузки (относительно небольшой части от параметрической нагрузки) вызывает устойчивые или неустойчивые колебания поверхностных слоев в виде функции времени для огибающих амплитуд параметрических колебаний, которые зачастую приводят к параметрическому резонансу. В большинстве случаев колебательный процесс в поверхностных слоях происходит по закону

$$A_1(t) = C_1 e^{\mu t} \psi_1(t) + C_2 e^{\mu t} \psi_2(t). \quad (108)$$

В приведенном выражении (108)

$C_1, C_2$  – некоторые произвольные постоянные, определяемые из начальных условий задачи;  $\mu$  – некоторый малый параметр;  $\psi_1(t); \psi_2(t)$  – произвольные линейно независимые периодические функции времени, от удачного выбора которых зависит конечный результат решения задачи.

Существуют математические методы решения дифференциальных уравнений, которые позволяют найти два линейно независимых частных решения задачи [19]. Этот прием позволяет построить решение задачи (98), используя найденные функции  $\psi_1(t); \psi_2(t)$ .

Для количественного решения задачи о возникновении параметрических колебаний и параметрического резонанса в поверхностных слоях рельса (или





колеса, в зависимости от постановки задачи) применим приближенное решение дифференциального уравнения по методу ВКБ (Вентцеля, Крамерса, Бриллюэна и Джеффриса), [20], которое позволит построить решение как уравнения Матье, так и уравнения Матье-Хилла.

Для применения метода запишем уравнение (107) в виде

$$A_k'' + \frac{EIk^4\pi^4}{l^4m_0} \left[ 1 + T_c(t) \frac{m_0}{EI} \frac{l^2}{k^2\pi^2} \right] A_k = 0 \quad (109)$$

или

$$A_k'' + \left[ \frac{EIk^4\pi^4}{l^4m_0} + T_c(t) \frac{k^2\pi^2}{l^2} \right] A_k = 0. \quad (110)$$

Если выражение в квадратных скобках вместе с постоянным коэффициентом в формуле (109) обозначить через  $\Omega_{*k}^2(t)$  и выражение в квадратных скобках в формуле (110) обозначить через  $\Omega_{*k}^2(t)$ , то получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с переменной (плавающей) частотой  $\Omega_{*k}^2(t)$ , эквивалентное (109) и (110)

$$A_k'' + \Omega_{*k}^2(t) A_k = 0. \quad (111)$$

Как видим из (111), выражения для определения функции амплитуд соответствующих различным формам колебаний совершенно идентичны.

При этом критическая сила, соответствующая второй форме колебаний будет в четыре раза больше, чем для первой форме колебаний, тогда возможность реализации второй и последующих форм колебаний будет значительно меньшей.

На основании приведенных соображений запишем уравнение для определения функции амплитуд колебаний, опуская индексы

$$A'' + \Omega_*^2(t) A = 0. \quad (112)$$

В приведенном уравнении (112) функция  $\Omega_*(t)$  имеет смысл «плавающей» частоты колебаний около своего среднего значения.

Обращаясь к уравнению (110), заключаем, что оно является уравнением Хилла, для построения решения такого уравнения необходимо найти два частных решения  $\psi_1(t); \psi_2(t)$ , которые являются периодическими и линейно независимыми. Ответ на этот вопрос не очевиден. Если ориентироваться на уравнение (112), то его решение может быть построено по методу ВКБ [20] в следующем виде

$$A_1(t) = \sqrt{\frac{\Omega_{*0}}{\Omega_{*1}}} A_0 \cos \int_0^t \Omega_{*1}(t) dt + \frac{1}{\sqrt{\Omega_{*1}\Omega_{*0}}} \left( \dot{A}_0 + \frac{\dot{\Omega}_1}{\Omega_{*0}} A_0 \right) \sin \int_0^t \Omega_{*1} dt, \quad (113)$$

где  $A(0) = A_0; \dot{A}(0) = \dot{A}_0; \Omega_{*0} = \Omega_*(0); \dot{\Omega}_{*0} = \dot{\Omega}_*(0)$ .

Выражение (113) может быть принято в качестве приближенного решения (112), если выполняется условие

$$\left| 0,5 \frac{\dot{\Omega}_{*1}}{\Omega_{*1}^3} - 0,75 \left( \frac{\dot{\Omega}_{*1}}{\Omega_{*1}^2} \right)^2 \right| \ll 1. \quad (114)$$



На практике наиболее опасным является режим, соответствующий первой собственной форме колебаний поверхностных слоев (или первой форме потери продольной устойчивости), то есть при  $k=1$ .

Для анализа решения уравнения (112) удобнее обратиться к одному из вариантов метода ВКБ (Джеффриса) [19].

Суть решения (112) состоит в том, что исходное уравнение представим в форме

$$A_1''(t) - [\bar{\rho}_1^2 h(t) + g_1(t)]A_1(t) = 0. \quad (115)$$

Исходя из (109) и (110)

$$\bar{\rho}_1^2 = \frac{E_n I k^4 \pi^4}{l^4 m_0}; \quad h_1(t) = -1; \quad g_1(t) = -T_c(t) \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \quad \text{при } k = 1.$$

Для понижения порядка уравнения (115) используем подстановку

$$A_1(t) = \exp(\bar{\rho}_1 \int u(t) dt). \quad (116)$$

В результате подстановки переходим к уравнению первого порядка относительно промежуточной переменной

$$\bar{\rho}_1 u'(t) + \bar{\rho}_1^2(t) + \bar{\rho}_1^2 - g_1(t) = 0. \quad (117)$$

Это дифференциальное уравнение является уравнением Риккати. Согласно метода ВКБ, решение (112) ищем в виде ряда

$$u = \sum_{v=1}^{\infty} u_v(t) \bar{\rho}_1^{-v}. \quad (118)$$

После подстановки ряда в (115) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях  $\rho_1$ , получаем

$$\begin{aligned} u_0 &= \pm \sqrt{-1} = \pm i; \quad u_1 = \frac{u_0'}{2u_0} = 0; \quad u_2 = \frac{g_1(t) - u_1' - u_1^2}{2u_0} = \pm \frac{g_1(t)}{2i}; \\ u_3 &= \frac{1}{2U_0} (u_2' + \sum_{v=1}^2 u_1 u_2) = \pm \frac{g_1'(t)}{4}; \\ u_4 &= -\frac{1}{2u_0} \left( \mp \frac{g_1''(t)}{2i \cdot 2i} \right) = \pm \frac{g_1'(t)}{8i^3} = \mp \frac{g_1'(t)}{8i^3} \end{aligned} \quad (119)$$

Запишем выражение для разложения вспомогательной функции  $u(t)$  в функциональный ряд для четырех приближений

$$u(t) = \pm i \pm \frac{g_1}{2i\bar{\rho}_1^2} \mp \frac{g_1'}{4\bar{\rho}_1^3} \mp \frac{g_1''}{8i\bar{\rho}_1^4} + \dots \quad (120)$$

Запишем решение уравнения для временной составляющей поперечных перемещений поверхностных слоев  $A_1(t) \bar{\rho}_1$

$$A_1(t) = \exp \left( i\bar{\rho}_1 t - \frac{i}{\bar{\rho}_1} \int_0^t g_1(\tau) d\tau + \frac{1}{4\bar{\rho}_1^2} g_1(t) + \frac{i}{8\bar{\rho}_1^3} g_1'(t) + \dots \right). \quad (121)$$

Ограничимся в решении четырьмя членами ряда. Тогда прогибы поверхностных слоев рельса могут быть представлены согласно (111) при



$k = 1$ . В этом случае  $\bar{\rho}_1$  и  $g_1(t)$  записываем при  $k = 1$ . Следовательно, прогибы поверхностных слоев для первой формы колебаний запишем в виде:

$$w(x, t) = \exp \left[ \frac{1}{4\bar{\rho}_1^2} g_1(t) + i(\bar{\rho}_1 t - \frac{1}{\bar{\rho}_1} \int_0^t g_1(\tau) d\tau + \frac{1}{8\bar{\rho}_1^3} g_1'(\tau) \right] \sin \frac{\pi x}{l_2}. \quad (122)$$

Заметим, что вторая и последующая форма колебаний (потери устойчивости) поверхностных слоев может быть реализованы при значительно больших касательных нагрузках, то есть сначала обязательно возникает первая форма.

В выражении (122) комплексная функция в квадратных скобках описывает периодический процесс, который обусловлен автоколебаниями в зоне сцепления колеса с рельсом и накладывается на деформационную волну, соответствующую первой форме колебаний и может быть нарастающим, затухающими или установившимся автоколебательным процессом.

Остановимся на выражении (122), которое записано для первой формы потери продольной устойчивости поверхностных слоев рельса.

Отметим, что исходное дифференциальное уравнение (96) описывает продольный изгиб балки-полоски, состоящей из уплотненных поверхностных слоев рельса, где  $w(x, t)$  – динамический прогиб балки-полоски. Причем длина деформированного участка балки-полоски  $l_2$ , на которой может быть реализовано  $k=2,41$  полуволн.

Обращаясь к выражению прогибов (122), записанному в комплексной форме, предварительно запишем выражение для вспомогательной функции  $g(t)$ , которую представим на основании выражения (115) для параметрической нагрузки в виде

$$g_1(t) = -\frac{k^2\pi^2}{l_2^2} T_c(t) = -\frac{k^2\pi^2}{l_2^2} [T_0 + T_1(t)\cos\omega_0(t)], \quad (123)$$

при этом функция  $\rho_1$  является константой и имеет вид  $\rho_1 = \frac{k^2\pi^2}{l_2^2} \sqrt{\frac{E_n I}{m_0}}$ .

Запишем выражение

$$\frac{g_1(t)}{2\bar{\rho}_1^2} = -\frac{l_2^2}{4k^2\pi^2} \cdot \frac{m_0}{E_n I} [T_0 + T_1 \cos\omega_0 t]. \quad (124)$$

Причем функции  $T_c(t)$ ,  $T_0$ ,  $T_1(t)$  определены в соответствии с выражением (59). Так как функция  $T_1(t)$  является медленно изменяющейся (функцией), согласно методу решения Ван-дер-Поля (для нелинейных дифференциальных уравнений).

Запишем выражение

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{\rho}_1} \int_0^t g_1(\tau) d\tau &= -\frac{k^2\pi^2}{l_2^2 \bar{\rho}_1} \int_0^t [T_0 + T_1(\tau)\cos\omega_0\tau] d\tau = -\frac{k^2\pi^2}{\bar{\rho}_1 l_2^2} \left[ T_0 t - \frac{T_1}{\omega_0} \sin\omega_0 t \right] = \\ &= -\sqrt{\frac{m_0}{E_n I}} \left[ T_0 t + \frac{T_1}{\omega_0} \sin\omega_0 t \right] \cdot \frac{k^2\pi^2}{l_2^2} \end{aligned} \quad (125)$$

Переходим к выражениям  $g_1'(t)$  и  $g_1'/8\rho^3$ , для чего продифференцируем один раз по  $t$  выражение (123) с учетом предложения Ван-дер-Поля о медленно



изменяющейся амплитуде  $T_1(t) \approx T_1 \approx const$ , тогда запишем

$$\frac{g_1'(t)}{8\bar{\rho}_1^3} = -\frac{k^2\pi^2}{8\bar{\rho}_1^3 l_2^2} [-T_1\omega_0 \sin\omega_0 t] \left(\sqrt{\frac{m_0}{E_n l}}\right)^3 = \frac{l_2^4}{8k^4\pi^4} [T_1\omega_0 \sin\omega_0 t] \left(\sqrt{\frac{m_0}{E_n l}}\right)^3 \quad (126)$$

Теперь перепишем выражение (123), (125), (126)

$$w(x, t) = \exp\left\{-\frac{l_2^2}{4k^2\pi^2} \cdot \frac{m_0}{E_n l} (T_0 + T_1 \cos\omega_0 t) + i\left(\frac{k^2\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{E_n l}{m_0}} t + \sqrt{\frac{m_0}{E_n l}} (T_0 t + \frac{T_1}{\omega_0} \sin\omega_0 t) + \left(\sqrt{\frac{m_0}{E_n l}}\right)^3 \frac{l_2^4}{8k^4\pi^4} T_1 \omega_0 \sin\omega_0 t\right)\right\} \sin \frac{k\pi x}{l_2}. \quad (127)$$

Перепишем выражение (127) в следующем виде

$$w(xt) = \exp\left[-\frac{l_2^2}{4k^2\pi^2} \cdot \frac{m_0}{E_n l} (T_0 + T_1 \cos\omega_0 t)\right] \cdot \exp i\left\{\left[\frac{k^2\pi^2}{l_2^2} \sqrt{\frac{E_n l}{m_0}} + \sqrt{\frac{m_0}{E_n l}} T_0\right] \cdot t \left[\sqrt{\frac{m_0}{E_n l}} \cdot \frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0} + \left(\sqrt{\frac{m_0}{E_n l}}\right)^3 \frac{l_2^4}{8k^4\pi^4} \omega_0 \sin\omega_0 t\right] T_1\right\} \sin \frac{k\pi}{l_2} x. \quad (128)$$

Преобразуем выражение (128) с помощью формулы Эйлера, выделяя действительную и мнимую части

$$w(xt) = \exp\left[-\frac{l_2^2}{4k^2\pi^2} \cdot \frac{m_0}{E_n l} (T_0 + T_1 \cos\omega_0 t)\right] \cdot \cos\left\{\left(\frac{k^2\pi^2}{l_2^2} \sqrt{\frac{E_n l}{m_0}} + \sqrt{\frac{m_0}{E_n l}}\right) T_0 t + \left[\sqrt{\frac{m_0}{E_n l}} \frac{1}{\omega_0} + \left(\sqrt{\frac{m_0}{E_n l}}\right)^3 \frac{l_2^4 \omega_0}{8k^4\pi^4}\right] \cdot T_1 \sin\omega_0 t\right\} + i \sin\left\{\left(\frac{k^2\pi^2}{l_2^2} \sqrt{\frac{E_n l}{m_0}} + \sqrt{\frac{m_0}{E_n l}}\right) T_0 t + \left[\sqrt{\frac{m_0}{E_n l}} \frac{1}{\omega_0} + \left(\sqrt{\frac{m_0}{E_n l}}\right)^3 \frac{l_2^4 \omega_0}{8k^4\pi^4}\right] \cdot T_1 \sin\omega_0 t\right\} \sin \frac{k\pi}{l_2} x. \quad (129)$$

В качестве решения (64) принимаем еще и комплексно сопряженное решение с выражением (129), которое заключается в изменении знака перед  $\exp$  «-» на «+», в соответствии с выражением (108).

При использовании формулы (129) в решении ограничимся только действительной частью, в этом случае мнимую часть решения, содержащую число « $i$ » не рассматриваем.

Из вида функции (129) следует, что решения (64) в элементарных функциях не существует.

Оценим устойчивость решения уравнения (64) в виде (129), то есть возможность проявления параметрического резонанса при автопараметрических колебаниях (или его отсутствия).

Для определения границ главной области неустойчивости используем формулу В.В.Болотина или Н.М.Беляева[8], согласно которым диапазон изменения частот определяется

$$\theta_{*1} = 2\Omega_{*1} \sqrt{1 \pm \mu_1}, \quad (130)$$

$$\theta_{*1} = 2\Omega_{*1} (1 \pm \mu_1), \quad (131)$$

где  $\Omega_{*1}$  – первая собственная частота колебаний балки-полоски,



нагруженной постоянной составляющей касательной силы (102);

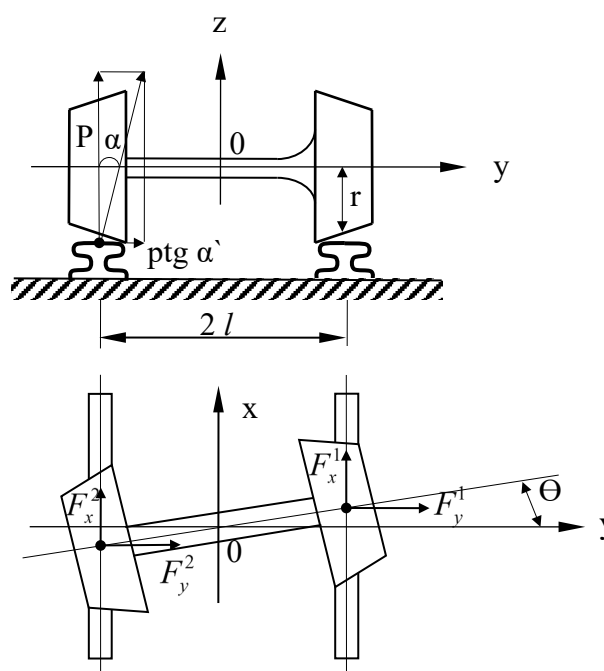
$\mu_1$  – коэффициент возбуждения нагрузки для первой собственной частоты колебаний, который является «малым» параметром.

Кроме того, не прибегая к решению (64) можно определить зоны неустойчивости для уравнения, используя диаграмму Айнса-Стретта[8].

Колебания, которые могут возникать при движении колеса, являются автопараметрическими колебаниями на участке контакта и впереди точки взаимодействия колеса с рельсом (рис.4). Эти колебания, как видно из решений (113) и (122), могут достигать значительной интенсивности и препятствовать увеличению скорости движения колеса (экипажа).

Изучению условий возникновения путевой неустойчивости движения железнодорожных экипажей посвящено большое количество работ [1], [21]. Однако эти исследования направлены на изучение движения тепловозов, электровозов и вагонов в тяговом режиме. Вместе с тем, в настоящее время

получили распространение специализированные виды железнодорожного транспорта, в которых основным режимом движения является толкающий режим. В этом случае два конических колеса, насаженных на одну ось, получают возможность движения как вдоль, так и поперек «продольной» оси дорожного полотна (рисунок 5).



**Рисунок 5 - Движение колесной пары при «вилянии»**

Вместе с тем, движущее усилие  $T_c$  (в режиме толкания), действует как на рельс, так и на колесо, способствует выборке зазоров между колесной парой и рельсовым полотном и, вследствие коничности колеса, приводит к возникновению бокового увода колесной пары и возникновению боковых усилий между колесом и рельсом. Причем, действующие усилия напрямую зависят от радиусов закруглений на участках рельсового полотна.



При движении подвижного состава, укомплектованного одноосными тележками в режиме тяги (случай головной ведущей тележки) реализуется извилистое движение состава потому, что вследствие инерционности каждой составляющей тележки будет иметь место их набегание на впереди идущие тележки и, будет происходить непрерывная выборка зазоров между колесными парами и рельсами путевой структуры.

Если же весь состав или его часть будут находиться в зоне сжатия, то под влиянием силы толкания возникнут поперечные составляющие усилия толкания, которые способствуют выборке зазоров между колесной парой и рельсами.

Исходя из переменного характера усилия толкания  $T_c$  для малых значений углов поворота колесных пар относительно вертикальной оси  $\bar{\theta}$  поперечные составляющие усилия толкания для каждой оси  $T_{cy}$ , определяются из выражения

$$T_{cy} = \bar{\theta} \cdot T_c, \quad (132)$$

где  $\bar{\theta}$  – угол поворота колесной пары относительно вертикальной оси.

При вилянии колесной пары относительно вертикальной оси будет происходить непрерывное раскачивание колесной пары по закону

$$\bar{\theta} = \bar{\theta}(t). \quad (133)$$

Наибольшее значение угла разворота колесной пары на прямолинейном участке пути будет определяться регламентированным зазором между рельсами и колесной парой, а также средним радиусом колеса. На криволинейных участках пути угол разворота  $\bar{\theta}$  и поперечная составляющая усилия толкания  $T_{cy}$  будут также зависеть и от радиуса установки рельсового пути в горизонтальной плоскости.

При движении колесной пары одноосной тележки без учета приложенной поперечной нагрузки для режима тяги будем исходить из того, что на колесную пару действуют силы инерции, веса, продольные и поперечные составляющие усилия толкания по аналогии с [11] можно записать систему уравнений извилистого движения колесной пары в виде:

$$\begin{cases} m\ddot{y} + 2K_2 \left( \frac{\dot{y}}{v} + \bar{\theta} \right) + P\delta y = 0 \\ m\rho_1^2 \ddot{\bar{\theta}} + 2K_2 \left( \bar{l}^2 \frac{\bar{\theta}}{v} - \frac{\bar{l}\gamma}{r} y \right) = 0 \end{cases} \quad (134)$$

где  $m$  – масса колесной пары;  $\rho_1$  – радиус инерции колесной пары;  $2\bar{l}$  – расстояние между кругами катания;  $r$  – средний радиус колес;

$r + \Delta r_1, r + \Delta r_2$  – значения радиусов катания колес при наличии бокового смещения колесной пары;  $\Delta r_1 - \Delta r_2 \approx \gamma y$  – разность приращений радиусов колес;  $\gamma$  – коэффициент пропорциональности (коничность колес);  $y$  – боковое смещение колесной пары при её вилянии;  $\alpha_1, \alpha_2$  – углы наклона нормалей в точках касания левого и правого колес;  $\alpha_1 - \alpha_2 \approx \gamma y$  – разность углов наклона нормалей в точках контакта колес;  $\delta$  – коэффициент пропорциональности [11];  $P$  – вертикальная нагрузка на колесо;

$v$  – линейная скорость центра вращения колеса;  $T_c$  – касательная сила



сопротивления перемещению колеса, численно равная силе тяги, приложенной к колесу.

В случае рассмотрения контактной задачи при качении колеса по рельсу на участке их взаимодействия и впереди этого участка, использованы представления о существующей зависимости между изменением коэффициента трения от скорости взаимного проскальзывания между колесом и рельсом, а также гипотезе Картера, согласно которой касательное усилие пропорционально величине относительного скольжения  $\varepsilon$  [10], то есть

$$T_0 = -K_2 \varepsilon, \tag{135}$$

где  $K_2 = \alpha_1^* \sqrt{Pr}$  – коэффициент псевдоскольжения;  $\alpha_1^*$  – коэффициент пропорциональности, согласно гипотезе Картера.

Сила  $T_0$  фактически является силой трения-скольжения между колесом и рельсом (в том числе и между ребордой и рельсом). Эта касательная сила растет пропорционально величине  $\sqrt{Pr}$ , а также пропорционально этому корню растет и затухание системы. Также из (124) следует, что затухание растет на малых скоростях скольжения элементов пары.

Кроме того, по данным [10] с увеличением нагрузки в степени  $\sqrt{P}$  возрастает существенно твердость, предел текучести, предел выносливости, а также толщина уплотненного слоя пропорционально корню квадратному из отношения  $\sqrt{\frac{P}{\sigma_T}}$ , где  $\sigma_T$  – предел текучести исследуемой детали контактирующей пары.

В силу высказанных соображений и того, что возрастает жесткость и демпфирующая способность контакта (второе и третье слагаемое) первого уравнения (134) в некотором, незначительном диапазоне увеличения вертикальных нагрузок (например, на 10 – 15%) приводит к уменьшению работы разрушающих сил трения контактирующих колес и рельсов подвижного состава при прочих равных условиях.

Характеристическое уравнение для системы (134) получим, если введем вместо производной по времени символический параметр « $p$ ». Тогда характеристическое (алгебраическое) уравнение системы (134) запишем в виде:

$$\begin{vmatrix} mp^2 + \frac{2K_2}{v}p + P\delta, & 2K_2 \\ -2K_2 \frac{\bar{y}}{r}, & mp^2 \rho_1^2 + \frac{2K_2 \bar{l}^2}{v}p \end{vmatrix} = 0. \tag{136}$$

Характеристическое уравнение (136) после раскрытия определителя может быть приведено к алгебраическому уравнению четвертой степени относительно параметра  $p$ . Аналитическое решение (136) не позволит сделать однозначный вывод о характере влияния параметров взаимодействующей колесной пары на устойчивость движения. Этот вопрос может быть установлен, исходя из (134), не прибегая к его решению.

По аналогии с [10] можно утверждать, что устойчивое движение пары возможно при выполнении следующего условия Гурвица



$$\frac{1}{v^2} + m \left[ \frac{\delta \rho_1^4}{4\alpha_1^{*2} r \bar{l}^2 (\rho_1^2 + \bar{l}^2)} - \frac{\gamma}{r} \cdot \frac{(\rho_1^2 + \bar{l}^2)}{P \delta \bar{l}^3} \right] > 0. \quad (137)$$

Если предположить, что при выполнении равенства

$$\frac{1}{v^2} + m \left[ \frac{\delta \rho_1^4}{4\alpha_1^{*2} r \bar{l}^2 (\rho_1^2 + \bar{l}^2)} - \frac{\gamma}{r} \cdot \frac{(\rho_1^2 + \bar{l}^2)}{P \delta \bar{l}^3} \right] = 0 \quad (138)$$

скорость движения колесной пары  $v = v_{кр}$ , то для диапазона скоростей  $v < v_{кр}$  будет иметь место режим устойчивого движения колесной пары (в большом), тогда для диапазона скоростей  $v > v_{кр}$  будет иметь место неустойчивый режим движения колесной пары (в большом без учета эффектов в зоне контакта колеса и рельса).

Преобразуем выражение (138), откуда

$$v_{кр}^2 = \frac{4\alpha_1^{*2} \bar{l}^3 \delta (\rho_1^2 + \bar{l}^2) P}{m [P \delta^2 \rho_1^4 \bar{l} - 4\gamma \alpha_1^{*2} (\rho_1^2 + \bar{l}^2)^2]}. \quad (139)$$

Таким образом, для устойчивого движения колесной пары помимо выполнения условия (139) необходимо, чтобы имело место соотношение

$$P \delta^2 \rho_1^4 \bar{l} - 4\gamma \alpha_1^{*2} (\rho_1^2 + \bar{l}^2)^2 > 0. \quad (140)$$

Рассмотрим режим толкания при движении транспортного средства с одноосными тележками. В этом случае прямолинейная (или криволинейная) ось движущегося состава вдоль железнодорожного полотна деформируется и приобретает вид ломаной линии, в результате возникновения явления бокового увода колесной пары. Для данного режима движения суммарная сила бокового увода достигает максимального значения

$$\max T_y^{(1)} + \max T_y^{(2)} = 2K_2 \left( \frac{\dot{y}}{v} + \bar{\theta} \right)_{\max}, \quad (141)$$

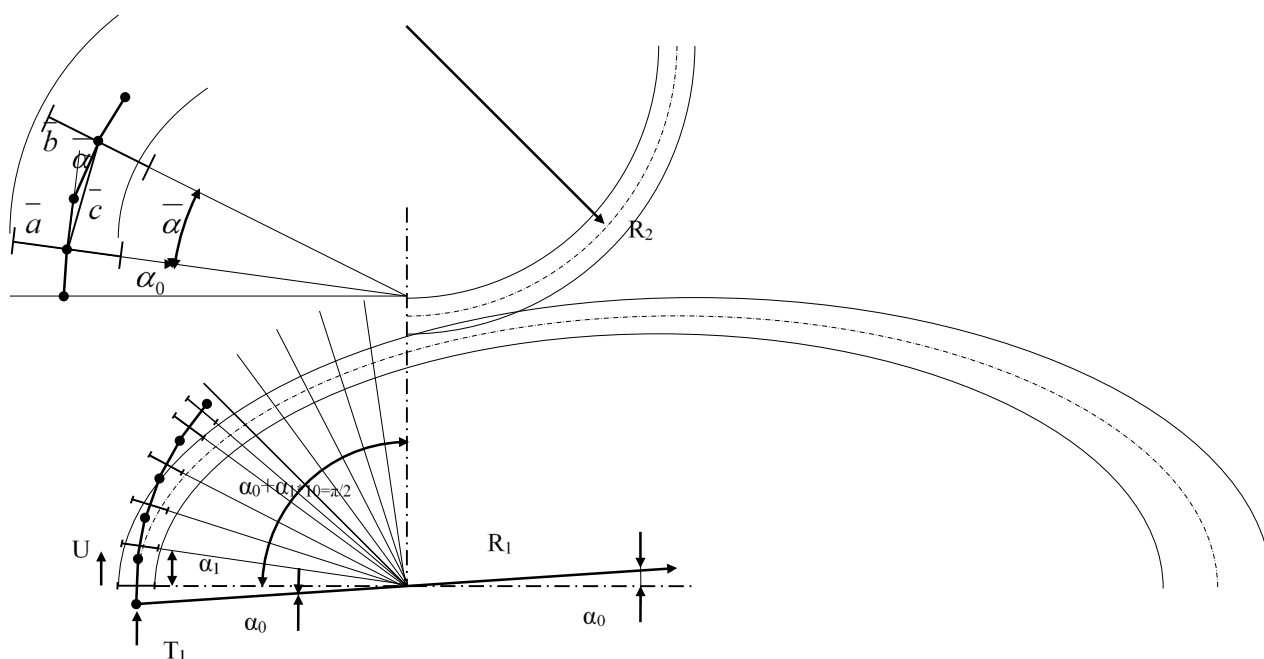
которая определяется после выборки зазоров между колесной парой и рельсами, исходя из статического равновесия совокупности тележек, связанных шарнирными сцепками, как изменяемый механизм, ограниченный в перемещениях «скользящими» связями в виде рельсового пути. Эта нагрузка, как совокупность сил трения скольжения превышает значение  $\max T_y^{(1)} + \max T_y^{(2)}$ , определяемое из условий бокового псевдоскольжения.

Рассмотрим совокупность одноосных тележек, связанных шарнирными сцепками. Обращаясь к механике движения такого подвижного состава интерес представляет рассмотрение режима толкания, когда совокупное усилие толкания направлено на последнюю тележку (или контейнер). Для получения кинематически фиксируемой системы передняя тележка при той же базе собирается двухосной. В связи с технологическими особенностями эксплуатации таких составов трасса может быть прямолинейной или криволинейной. При движении этих составов на прямолинейных участках трассы схема действующих усилий для определения ходовых сопротивлений и расчетные рекуррентные формулы приведены в работе [23]. Реальные трассы, по





которым движутся подвижные составы, обязательно включают криволинейные участки. Рассмотрим подвижный состав, который вписывается в криволинейную трассу со средним радиусом  $R$  (при этом  $_{max}R = R + \bar{l}$ ;  $_{min}R = R - \bar{l}$ ), (рисунок 6).



**Рисунок 6 - Вписывание подвижного состава в криволинейную путевую структуру.**

$T_1$  – суммарное усилие толкания;  $v$ – скорость движения состава;  $R_1, R_2$ – радиусы путевых дуг (наружный и внутренний);  $R$ – средний радиус закругления пути;  $\alpha_0, \alpha$ – углы вписывания состава в путевую дугу  $R$ ;  $R^I$  средний радиус дуги №2.

Каждая тележка обладает колесной парой с колесами, имеющими средний радиус катания  $r$  и длиной колесной пары  $2\bar{l}$  (расстояние между центрами колес). При вписывании состава в трассу все геометрические оси колесных пар ходовых тележек сходятся (теоретически) в геометрическом центре криволинейной трассы. Суммарное движущее усилие для состава будет равномерно распределено по торцевой стенке последней тележки. Это дает основание направить движущее усилие по оси хребтовой балки последней тележки. Получив импульсную нагрузку, последняя тележка стремится выбрать зазор в рельсовом пути и передать действующее усилие  $T_1$  на следующую тележку. В связи с поворотом оси последующей колесной пары относительно предыдущей на угол  $\bar{\alpha}$  происходит разложение касательной нагрузки  $T_1$  на нагрузку, параллельную  $T_2$  и перпендикулярную оси предпоследней колесной пары  $N_2$ .

Рассмотрим предварительно геометрию вписывания подвижного состава в дугу криволинейного пути (рис.6). Из треугольника  $ABC$ , образованного «дышлом»  $\bar{a}$  и «хвостовиком»  $\bar{b}$  вагонетки, а также хордой  $\bar{c}$  дуги  $AB$  устанавливаем зависимость между элементами хребтовой балки вагонетки  $\bar{a}, \bar{b}$ , хордой дуги  $AB$  и радиусом криволинейного пути  $R$ .



Константы  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  являются конструктивными параметрами системы ходовых тележек, которые позволяют изменяемому механизму вписываться в закругления пути с радиусом  $R$ , углом между осями смежных тележек  $\bar{\alpha}$  и центром кривизны железнодорожного пути. Зная конструктивные параметры тележек  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ , радиус кривизны пути  $R$  определим длину хорды  $AB$ , дугу  $AB$  и угол  $\bar{\alpha}$  из соотношений (142)

$$\frac{\bar{c}}{\sin \bar{\alpha}} = \frac{\bar{a}}{\sin \bar{\alpha}_1} = \frac{\bar{b}}{\sin \bar{\alpha}_2}; \tag{142}$$

$$\frac{\bar{c}}{2R} = \sin \frac{\bar{\alpha}}{2}; \quad \bar{a} = 2 \arcsin \frac{\bar{a}}{2}, \tag{143}$$

$$\bar{c}^2 = \bar{a}^2 + \bar{b}^2 + 2\bar{a}\bar{b}\cos \bar{\alpha}. \tag{144}$$

Исходя из условий транспортировки грузов, рельефа местности, скоростных режимов движения состава задаемся геометрическими параметрами трассы, размерами хребтовой балки, размерами кузова, способами загрузки и разгрузки при транспортировании груза. Базовые размеры трассы и подвижного состава определяем, используя зависимости (132), (133), (135), (142), (143), (144).

Предполагаем, что геометрия трассы и подвижного состава определены, а также, что толкающее исходное усилие  $T_1$  приложено вдоль оси хребтовой балки последней тележки, и так как хребтовые балки при вписывании тележек в траекторию пути представляют собой ломаную линию, то в шарнирных соединениях последующих балок будут приложены продольные  $T_i$  и поперечные усилия  $N_i$ . Отметим, что поперечные усилия  $N_i$  будут способствовать выборке зазоров между колесными парами и рельсами. В

результате выборки зазоров между колесными парами и рельсами возникают силы сопротивления скольжению (силы трения скольжения), поэтому толкающее усилие, прикладываемое к каждой последующей тележке будет уменьшаться на величину, обусловленную  $W$ . Учитывая тот факт, что сила толкания  $T_1$ , приложенная к последней тележке направлена вдоль оси хребтовой балки, то мы можем пренебречь составляющей поперечной силы  $N_1 = T_1 \sin \bar{\alpha}$ .

Рассматривая последовательное приложение продольных и поперечных усилий к шарнирным узлам тележек, запишем выражения для продольных и поперечных усилий подвижного состава, работающего в режиме толкания

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 = T_1 \\ T_2 = T_1 \cos \bar{\alpha} - w \\ T_3 = T_1 \cos^2 \bar{\alpha} - w \cos \bar{\alpha} - w \\ T_4 = T_1 \cos^3 \bar{\alpha} - w \cos^2 \bar{\alpha} - w \cos \bar{\alpha} - w \\ \dots \\ T_n = T_1 \cos^{(n-1)} \bar{\alpha} - w \cos^{(n-2)} \bar{\alpha} - \dots - w \cos^2 \bar{\alpha} - w \end{array} \right. \tag{145}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N_2 = T_2 \sin \bar{\alpha} = (T_1 \cos \bar{\alpha} - w) \sin \bar{\alpha} \\ N_3 = T_3 \sin \bar{\alpha} = (T_2 \cos \bar{\alpha} - w) \sin \bar{\alpha} = (T_1 \cos^2 \bar{\alpha} - w \cos \bar{\alpha} - w) \sin \bar{\alpha} \\ N_4 = T_4 \sin \bar{\alpha} = (T_1 \cos^3 \bar{\alpha} - w \cos^2 \bar{\alpha} - w \cos \bar{\alpha}) \sin \bar{\alpha} \\ \dots \\ N_n = T_{n-1} \sin \bar{\alpha} = (T_1 \cos^{(n-1)} \bar{\alpha} - w \cos^{(n-2)} \bar{\alpha} - \dots - w \cos^2 \bar{\alpha} - w) \sin \bar{\alpha} \end{array} \right. \tag{146}$$



Запишем рекуррентные формулы для определения продольных и поперечных усилий, действующих на тележки подвижного состава

$$T_n = T_1 \cos^{(n-1)} \bar{\alpha} - w(1 + \cos \bar{\alpha} + \cos^2 \bar{\alpha} + \dots + \cos^{(n-2)} \bar{\alpha}) \quad (147)$$

$$N_n = [T_1 \cos^{(n-1)} \bar{\alpha} - w(1 + \cos \bar{\alpha} + \cos^2 \bar{\alpha} + \dots + \cos^{(n-2)} \bar{\alpha})] \sin \bar{\alpha} \quad (148)$$

Заметим, что для определения толкающих усилий при выходе из путевой дуги, опирающейся на угол  $90^\circ$ , усилие толкания  $T_n$ , будет направлено по касательной к радиусу дуги при  $\alpha_{\text{общ}} \approx 90^\circ$ , тогда толкающее усилие  $T_{n+1}$  будет приложено к последующей тележке  $(n+1)$  на входе в дугу (2), развернутую по отношению к рассматриваемой дуге (1) во внешнюю сторону на угол  $90^\circ$  (рис. 6).

При расчете усилий, приложенных к дуге №2 учтем, что последнее усилие  $T_n$  на дуге №1 будет приложено к въезжающей на дугу тележку  $(n+1)$ . Таким образом, усилие  $T_{n+1}$  будет усилием для первой тележки  $(n+1)$ , въезжающей на дугу №2, тогда расчет усилий  $T_{n+2}$ ,  $T_{n+3}$  ..... для тележек  $(n+2)$ ,  $(n+3)$  ....., въезжающих на дугу №2 будет производиться по формулам (147), (148), только вместо усилия  $T_1$  будет фигурировать усилие  $T_{n+1}$ , а вместо угла  $\bar{\alpha}$  будет использован угол  $\bar{\alpha}'$ , соответствующий радиусу дуги №2. Если же дуга №1 будет опираться на угол  $\alpha_{\text{общ}} \approx 180^\circ$ , то для расчета усилий для других траекторий (например, дуги №3 или прямолинейный участок), то используем те же формулы (147), (148) для криволинейного участка и формулы [22] для прямолинейного участка.

В связи с тем, что формы трасс могут существенно отличаться и тяговые усилия в процессе движения носят переменный характер, то для выполнения тягового расчета при различных расположениях двигателей необходимо составить программу по определению продольных и поперечных усилий, используя (147), (148) и [22].

Для практической реализации предложения о возможности увеличения вертикальной нагрузки на колесо (колесную пару) необходимо обеспечить поддержание путевой структуры в технически исправном состоянии, то есть обеспечить реализацию зазоров в колее согласно действующих отраслевых стандартов, а также следить за состоянием стыков рельсов на предмет наличия линейных зазоров и установки смежных рельсов без вертикальных смещений.

Отклонение состыкованных рельсов по высоте более, чем на 2...3 мм приводит к возникновению дополнительных динамических нагрузок на стыках, что становится очевидным при увеличении вертикальной нагрузки на ось, и приводит к увеличению коэффициента динамичности и снижению усталостной прочности рельсовых стыков и поверхностей катания бандажей.

При выполнении условий монтажа рельсов и увеличении нагрузки на ось, будут повышаться толщина накатанного слоя, твердость взаимодействующих деталей, их пределы усталости, текучести и прочности.

Отметим, что для ведущих колес (колесных пар) транспортных тележек (контейнеров) или локомотивов будут иметь место эффекты сцепления и проскальзывания, поэтому самовозбуждающиеся колебания могут возникать как



в зоне сцепления колес и рельсов, так и в зоне перед набегающим колесом при деформировании рельса проявляться в виде параметрически возбуждаемых колебаний на гребнях деформационной волны рельса и его поверхностных слоев. Если же колесо или колесная пара является ведомым, то впереди точки набегания колеса будет наблюдаться деформационная волна без проявления самовозбуждающихся колебаний. Поэтому такие волны приводят к меньшим разрушениям поверхностных слоев и повышению их несущей способности. В этом случае могут иметь место деформационные волны, амплитуды изгибных деформаций поверхностных слоев которых будут меньше в результате повышения твердости, пределов выносливости, текучести и прочности.

Таким образом, в местах взаимодействия ведущих колес с рельсами будет больше оснований для разрушения поверхностных слоев рельсов и колес под действием дополнительных нагрузок при автопараметрических колебаниях. Именно в местах проскальзывания и деформационного взаимодействия колеса и рельса в первую очередь будет происходить шелушение, выкрашивание и скол поверхностных слоев. Обратимся к деформационным гребням, они возникают впереди катящихся колес, а после прохождения колеса по образовавшимся гребням они выравниваются. Результатом таких местных деформаций на рельсах после прекращения прокатывания колеса будет возникновение с определенным шагом поперечных полос, которые являются выположенными гребнями деформационных волн после многократного прокатывания колес по деформационным поверхностным слоям. Отметим, что такой характер приработки колеса и рельса свидетельствует о проявлении здесь деформационно-волновой гипотезы при трении (и изнашивании) для случая трения «качения» [15], [18].

### **Выводы**

1. В результате постановки и решения задачи о сцеплении и скольжении колеса в зоне контакта установлено, что для всех скоростей движения подвижного состава имеют место режимы возникновения фрикционных автоколебаний ведущих колесных пар под действием касательных сил трения.

2. Определены продольные и изгибные деформации в зоне рельса, опережающей катящееся колесо в виде участка волны деформации, для которого установлены длина и шаг. При этом на деформационную волну накладываются автопараметрические колебания, вызванные фрикционным взаимодействием в зоне контакта колеса и рельса. Эти колебания в ряде случаев могут приводить к появлению зон трещиноватости и волнистости на поверхностных слоях колеса и рельса. Такие дефекты на поверхностях колеса и рельса свидетельствуют либо о завышенной нагрузке, либо о выборе недостаточно прочного материала или о недостаточной поверхностной обработке давлением контактирующей пары и потери усталостной прочности.

3. Установлено, что повышение несущей способности пары колесо-рельс связано с поверхностным упрочнением наружных слоев деталей и, как следствие, с толщиной накатанного слоя в процессе эксплуатации транспортных средств. Причем толщина накатанного слоя не должна превышать некоторого



значения, которое называется «критической» толщиной. При больших значениях толщины накатанного слоя работоспособность пары будет заметно снижаться.

4. Выявлено, что одна и та же глубина уплотненного поверхностного слоя может быть получена либо в результате длительной приработки колеса и рельса в эксплуатационных условиях, либо изначально получена в процессе предварительной механической приработки по методу обкатывания за счет приложения статического или динамического усилия (например, вибрирующим роликом).

5. Рекомендовано получать повышенные механические характеристики контактирующих деталей путем их обкатывания в условиях завода изготовителя до начала их промышленной эксплуатации.