



## KAPITEL 3 / CHAPTER 3<sup>3</sup>

### QUASI-OPTIMAL CONTROL OF THE CUTTING FORCE STABILIZATION LOOP OF MACHINE TOOLS

DOI: 10.30890/2709-2313.2022-10-02-019

#### Вступ

Вимоги до підвищення продуктивності металообробного обладнання на сьогоднішній день зумовили розвиток замкнених систем керування параметрами обробки заготовок. Збільшення швидкодії виконавчих електроприводів дало можливість побудувати складні системи формування режимів обробки, оскільки час їх реакції став співрозмірним із часом зміни технологічних параметрів різання і визначається в мілісекундах. Це дало можливість забезпечувати отримання зливної стружки із заготовки навіть при «чорновій» обробці, проте з іншого боку призвело до суттєвого ускладнення самих алгоритмів керування, що повинні враховувати більшу кількість збурюючих факторів. Робота із максимальною продуктивністю призвела до необхідності використання оптимальних алгоритмів керування, що працюють на піку своїх функціональних можливостей, процедура синтезу яких є досить складною при врахуванні внутрішніх і зовнішніх збурень, що діють в системі. Дана робота присвячена питанню синтезу регуляторів технологічних параметрів різання із врахуванням дестабілізуючих факторів, наявності нелінійних залежностей в контурі регулювання, коливань параметрів обробки тощо. В якості основного методу синтезу розглянуто метод динамічного програмування із знаходженням мінімуму квадратичного функціоналу якості. Дослідження якості запропонованих регуляторів здійснюється методом цифрового моделювання з використанням математичного пакету MATLAB та його додатку Simulink.

#### 3.1. Проблема оптимального керування контурами стабілізації силових параметрів різання на металообробних верстатів

Середі автоматизованих систем управління технологічним процесом металообробки все більше розповсюдження отримують системи стабілізації параметрів різання [1]. Використання таких систем дозволяє підвищити якість обробки деталей і зменшити зношування різця. При цьому сама система автоматизованого керування роботою верстату не потребує суттєвих змін та ускладнень [2]. Окрім цього при правильному виборі керованого параметру різання конструкція металообробного верстата взагалі не потребує змін і може бути введена при модернізації обладнання. В свою чергу складна вимірюваність та спостережуваність параметрів різання призводить до суттєвого ускладнення процедури налаштування регуляторів для системи керування, значно

<sup>3</sup>Authors: Toropov Anton Valeriyovich



ускладнюється математична модель контуру, з'являються зовнішні збурення, які треба враховувати. Отже оптимальне керування електромеханічними комплексами металообробних верстатів, що працюють в режимі регулювання технологічних параметрів, фактично, є однією з найскладніших задач високоточного керування електроприводами [3]. Наразі, до систем стабілізації силових параметрів, що найчастіше використовуються в сучасному виробництві відносяться [4,5]:

- система стабілізації потужності різання ( $P$ ),
- система стабілізації зусилля різання або однієї з її складових ( $F$ ),
- система регулювання лінійної швидкості різання ( $V_{об}$ ),
- система стабілізації крутного моменту ( $M$ ),
- система стабілізацій пружних деформацій ( $y$ ).

Загальна функціональна схема таких систем керування технологічними параметрами має вигляд, представлений на рис.1.



**Рисунок 1 – Функціональна схема системи стабілізації силових параметрів різання**

Стабілізація силових параметрів здійснюється як шляхом керування електроприводом шпинделю, так і за рахунок керування швидкістю приводу подачі. Слід відзначити, що комбіноване керування обома електроприводами в сучасних верстатах не використовується, оскільки призводить до занадто ускладненої процедури налаштування системи стабілізації, причому якість обробки значно не поліпшується.

Тому, коли значення технологічного параметру різання регулюється шляхом зміни швидкості обертання тільки одного з електроприводів, на другий електропривод із системи керування подається постійна величина сигналу завдання, що забезпечує його роботу в номінальному режимі.

Використання однієї із систем стабілізації технологічного параметру металообробного верстата визначається можливістю її технологічної реалізації взагалі, а також необхідною технологією.

Так, стабілізація лінійної швидкості різання найчастіше здійснюється шляхом зміни швидкості приводу шпинделю. При цьому лінійна швидкість обчислюється за формулою Ейлера при вимірюванні кутової швидкості обертання шпинделю та радіусу деталі, що обробляється  $V_{об} = \omega_{ш} \cdot R_{дет}$ .



Швидкодія такої системи невелика, оскільки потребує швидкої зміни швидкості обертання шпинделю, тому система керування реалізується пропорційною і не потребує додаткового дослідження.

Система стабілізації пружних деформацій у реалізується на основі приводу поперечної подачі і дуже складна в реалізації, оскільки процедура вимірювання пружних деформацій є занадто складною, і найчастіше використовується в сукупності із гідравлічними демпферами.

Інші вищевказані системи стабілізації силових параметрів працюють в режимі зміни швидкості повздовжньої подачі. При цьому найчастіше з вищевказаних систем застосовується система стабілізації тангенціальної складової зусилля різання  $F_z$ , внаслідок наступних факторів:

- значно зменшується навантаження на ріжучий інструмент;
- зменшується перевантаження приводу шпинделя металорізального верстату, що зумовлює основне енергоспоживання системи;
- сприяє формуванню хвильової стружки, що, в свою чергу, підвищує точність обробки поверхні;
- тангенціальна складова зусилля різання з висикою точністю може бути опосередковано оцінена за рахунок вимірювання навантаження приводу шпинделя верстата;
- швидкодія сучасних електроприводів дозволяє компенсувати в значній мірі колювання зусилля.

Наразі існує велика кількість публікацій, присвячених побудові систем керування електроприводами подачі, що забезпечують стабілізацію зусилля різання. При цьому розглянуті різні підходи до управління зусиллям різання або однією з її складових для різноманітних процесів металообробки, найпоширенішими з яких є обробка точінням або фрезеруванням.

Система керування електроприводом подачі різця повинна забезпечувати оптимізацію відповідно різних критеріїв якості, таких як мінімальна динамічна похибка, швидкість відпрацювання керуючого впливу, мінімізацію енергетичних чи паливних ресурсів, або комбінацію будь-яких з вищевказаних критеріїв. Крім цього, для реалізації оптимального керування необхідно повністю врахувати динамічні властивості керованого об'єкту, наявність колювань параметрів об'єкту, збурень стохастичного та детермінованого характеру тощо.

Одним із найбільш суттєвих факторів, що впливають на якість керування електромеханічними комплексами металообробних верстатів є наявність суттєвих нелінійностей. Вони обмежують величину керування, забезпечують нечутливість системи до малих значень керуючого впливу, змінюють напрям дії керування. Вони мають як механічне («люфти», «тертя»), так і електричне («обмеження на величину сигналу», «насичення магнітного кола») походження і в значній мірі впливають на характер перехідного процесу вихідної координати приводу.

Іншим фактором, що суттєво впливає на якість перехідних процесів при відпрацюванні сигналу є параметричні збурення. Зміна величин параметрів,



іноді навіть у невеликих межах, может призводити до виникнення незатухаючих коливань вихідної координати.

Більшість існуючих методів побудови регуляторів зусилля різання передбачають використання адаптивного управління. У роботах, присвячених побудові систем стабілізації зусилля різання пропонується використання П – регулятора з максимально допустимим коефіцієнтом підсилення для забезпечення високої робастності системи стабілізації до збурень коливального характеру, що викликані коливаннями припуску. При цьому коефіцієнт підсилення регулятора може змінюватись в залежності від параметрів системи. Іноді адаптивне керування формується з урахуванням обмежень на виході регулятора зусилля різання системі стабілізації. В той же час при налаштуванні системи виникає проблема використання такого регулятора внаслідок основного протиріччя статички та динаміки, так як при підвищенні коефіцієнта передачі розімкнутої системи зі збільшенням глибини різання система в системі з'являються автоколивання. Це, в свою чергу призводить до погіршення якості роботи, зносу різця і зумовлює необхідність зниження величини припуску і, відповідно зтягування перехідного процесу. Для вирішення вищезгаданої проблеми пропонується система стабілізації зі змінним коефіцієнтом посилення, який є функцією від обчисленого значення тангенціальної складової зусилля різання та параметрів швидкості подачі. У рівняння регулятора системи входять оцінені параметри управління в режимі реального часу коефіцієнтом посилення розімкнутої системи, що забезпечують приблизно постійне бажане значення коефіцієнта посилення всієї системи.

Суттєвим недоліком такого підходу є необхідність визначення бажаного коефіцієнта посилення за допомогою проведення емпіричних досліджень, що унеможливорює процедуру систематизації робіт проектування регулятора і завжди потребує втручання вискокваліфікованого персоналу. До того ж синтез регулятора для адаптивного керування системою з обмеженнями потребує знання поведінки об'єкта з урахуванням дуже великої кількості збурень та взаємного впливу між ними. Процес обробки деталей при точінні або фрезеруванні описується складними нелінійними залежностями, унаслідок чого дуже важко визначити параметри математичної моделі системи для конкретного режиму обробки.

Іноді, для забезпечення стійкості та досягнення необхідної якості регулювання в системах стабілізації зусилля різання з регулюванням відхилення вихідної координати від заданого значення також застосовуються попереджувальні коригувальні пристрої [1]. Такі системи не володіють астатизмом по збурюючого впливу на контур регулювання вихідної координати, а також в них має місце значне перерегулювання під час перехідних процесів.

Тому, в промисловості все частіше виникає питання розробки систем оптимального керування технорлогічними параметрами. При цьому, постає проблема формування найкращого закону керування саме в динамічних режимах роботи, які мають найбільший вплив про обробці деталей точінням або фрезеруванням.

Врахування впливу одночасно всіх нелінійних залежностей, а також



параметричних збурень, що мають місце в електромеханічній системі не дає точного рішення задачі оптимального керування. В той самий час в тому немає сенсу, і, в більшості випадків, достатньо вархувати лише одну або дві суттєві нелінійності і одне найбільш суттєве коливання параметру. При цьому буде отриманий закон «квазіоптимального» керування, що забезпечить дуже близький до найкращого характер роботи системи.

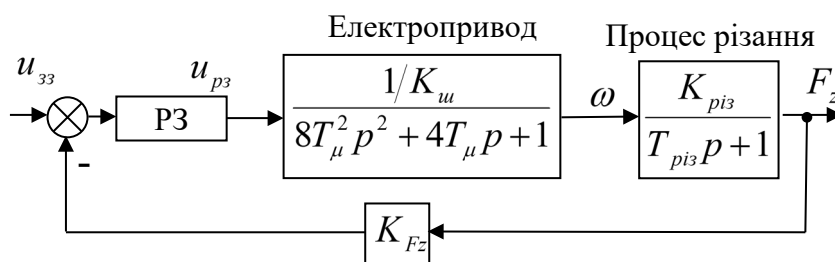
Для побудови оптимального або близького до нього закону керування необхідно побудувати математичну модель об'єкту, що враховує його особливості в повній мірі. На теперішній час двигуни постійного та змінного струму, що використовуються у приводах металорізальних верстатів, описуються достатньо точними моделями, в яких враховуються їх особливості. Те саме стосується процесу перетворення параметрів руху механічної частини системи у координату технологічного процесу різання. При виборі раціональної схеми керування електромеханічною системою, наприклад, реалізації системи підпорядкованого керування, можна вирішувати проблему впливу нелінійностей і зовнішніх збурень поступово, а саме вплив кривої намагнічення і варіації опору силової обмотки компенсувати в контурі регулювання струму, а тертя і зміну моменту інерції - в контурі регулювання швидкості. При такому підході найвищі вимоги до точності та робастності керування формуються до зовнішнього контуру регулювання. При реалізації системи стабілізації зусилля різання при чорновому знятті стружки за координатою  $z$ , що відповідає найбільшому навантаженню на різець, вона будується як зовнішній контур для електроприводу. В якості зовнішнього контуру також може бути реалізована і система стабілізації поперечної складової зусилля різання, що відповідає фактично стабілізації пружної деформації деталі. Проте така система керування призводить до фактичного коливання подачі, що, в свою чергу призводить до ускладнення профілю переміщення різця і наразі використовується вкрай рідко.

### **3.2. Вирішення задачі побудови лінійного оптимального регулятора для системи стабілізації зусилля різання при використанні класичного методу динамічного програмування.**

Для електроприводів металорізальних верстатів для «чорнової» обробки деталей, де вихідною координатою є зусилля різання за однією з координат математична модель має вигляд, представленою на рис.2. Така модель є лінійною і невраховує існуючих нелінійностей контуру стабілізації, варіанцій внутрішніх параметрів тощо.

На рисунку 2 прийняті наступні позначення:  $u_{zz}$  - завдання за зусиллям по осі  $Z$ ;  $u_{pz}$  - вихідний сигнал регулятора зусилля різання;  $\omega$  - швидкість обертання валу двигуна;  $F_z$  - складова зусилля різання по осі  $Z$ ;  $K_{\omega}$  - коефіцієнт зворотного зв'язку за швидкістю;  $T_{\mu}$  - некомпенсована стала часу напівпровідникового перетворювача;  $K_{Fz}$  - коефіцієнт зворотного зв'язку за переміщенням,





**Рисунок 2 – Лінійна математична модель контуру стабілізації тангенціальної складової зусилля різання.**

$K_{pіз}(t_p)$  - коефіцієнт підсилення процесу різання, що є функцією припуску  $t_p$ ,  $T_{pіз}$  - стала часу процесу різання,  $PЗ$  - регулятор зусилля.

Для здійснення процедури синтезу регулятора тангенціальної складової зусилля різання необхідно перейти від структурної схеми до системи диференціальних рівнянь, що описує динамічну поведінку системи. Запишемо модель керованого об'єкта у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{dF_z}{dt} &= -\frac{1}{T_{pіз}} F_z \frac{K_{pіз}}{T_{pіз}} \omega; \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{M}{J}; \\ \frac{dM}{dt} &= -\frac{1}{2T_\mu} M - \frac{J}{8T_\mu^2} \omega + \frac{J}{8T_\mu^2 \cdot K_u} u_{pз}, \end{aligned} \tag{1}$$

де  $M$  - крутний момент двигуна, що визначається безпосередньо перетворювачем та може бути переданий у зовнішню систему керування;  $J$  - сумарний момент інерції електроприводу.

Представимо математичну модель у вигляді змінних стану, отримуємо наступну систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a_1 x_1 + a_2 x_2; \\ \dot{x}_2 &= a_3 x_3; \\ \dot{x}_3 &= -a_4 x_2 - a_5 x_3 + b u_{pз}, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\text{де } x_1 = F_z, \quad x_2 = \omega, \quad x_3 = M, \quad a_1 = \frac{1}{T_{pіз}}, \quad a_2 = \frac{K_{pіз}}{T_{pіз}}, \quad a_3 = \frac{1}{J}, \quad a_4 = \frac{J}{8T_\mu^2}, \quad a_5 = \frac{1}{2T_\mu},$$

$$b = \frac{J}{8T_\mu^2 \cdot K_u}.$$

При виборі критеріїв оптимальної роботи електроприводів металообробних верстатів найчастіше пред'являються вимоги підвищеної точності відпрацювання сигналу завдання з обмеженням допустимих значень швидкості і моменту двигуна. Отже в якості критерію оптимальної роботи електроприводу



найчастіше використовується критерій мінімальної динамічної похибки з урахуванням обмеження на керування. При цьому для отриманої математичної моделі критерій оптимальності запишемо у наступній формі:

$$\min_{u_{p3}} J = \int_0^{\infty} [q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + q_3 x_3^2 + r u_{p3}^2] dt, \quad (3)$$

де  $q_1, q_2, q_3$  - вагові коефіцієнти, що визначають обмеження на змінні стану під час регулювання;  $r$  - ваговий коефіцієнт, що визначає обмеження на керування.

Для вибраного функціоналу якості і системи диференціальних рівнянь складаємо функціональне рівняння Беллмана.

В загальному випадку функціональне рівняння Беллмана набуває наступного вигляду:

$$\min_u [W(x, u) + \langle \nabla S(x, t), f(x, u) \rangle] = 0, \quad (4)$$

де  $W(x, u)$  - підінтегральна функція функціоналу якості,  $S(x, t)$  - функція Беллмана, що забезпечує мінімум вибраного функціоналу якості.

Рівняння регулятора чи закон керування визначається співвідношенням

$$\frac{\partial W(x, u)}{\partial u} + \langle \nabla S(x), \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \rangle = 0. \quad (5)$$

Звідки в явному вигляді закон оптимального керування визначається за формулою:

$$u = F \left[ \langle \nabla S(x), \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \rangle \right]. \quad (6)$$

Для нашого випадку функціональне рівняння Беллмана запишеться:

$$\min_u \left[ q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + q_3 x_3^2 + r u_{p3}^2 + \frac{\partial S}{\partial x_1} (-a_1 x_1 + a_2 x_2) + \frac{\partial S}{\partial x_2} a_3 x_3 + \frac{\partial S}{\partial x_3} (-a_4 x_2 - a_5 x_3 + b u_{p3}) \right] = 0 \quad (7)$$

Для отримання виразу для екстремуму даного функціонального рівняння знаходимо похідну за керуючим впливом і прирівнюємо її до нуля, отримуємо:

$$2r u_{p3} + b \frac{\partial S}{\partial x_3} = 0. \quad (8)$$

В явному вигляді оптимальне керування запишеться наступним чином:

$$u_{p3} = - \frac{b}{2r} \frac{\partial S}{\partial x_3}. \quad (9)$$



Далі підставляємо отриманий вираз в функціональне рівняння Беллмана, отримуємо рівняння Гамільтона – Якобі – Беллмана в замкненій формі:

$$q_1x_1^2 + q_2x_2^2 + q_3x_3^2 + \frac{\partial S}{\partial x_1}(-a_1x_1 + a_2x_2) + \frac{\partial S}{\partial x_2}a_3x_3 + \frac{\partial S}{\partial x_3}(-a_4x_2 - a_5x_3) = \frac{b^2}{4r} \left( \frac{\partial S}{\partial x_3} \right)^2 \quad (10)$$

Рішенням цього рівняння є функція Беллмана  $S$ . Для такого вигляду рівняння Гамільтона -Якобі -Беллмана функцію Беллмана слід шукати у вигляді квадратичної форми від змінних стану  $x_1, x_2, x_3$ . В загальному випадку функція Беллмана запишеться:

$$S(x_1, x_2, x_3) = K_{11}x_1^2 + 2K_{12}x_1x_2 + 2K_{13}x_1x_3 + K_{22}x_2^2 + 2K_{23}x_2x_3 + K_{33}x_3^2, \quad (11)$$

де  $K_{ij}, ij = \overline{1,3}$  - коефіцієнти квадратичної форми, що повинні бути знайдені.

Відповідно часткові похідні від функції Беллмана запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial x_1} &= 2K_{11}x_1 + 2K_{12}x_2 + 2K_{13}x_3, \\ \frac{\partial S}{\partial x_2} &= 2K_{12}x_1 + 2K_{22}x_2 + 2K_{23}x_3, \\ \frac{\partial S}{\partial x_3} &= 2K_{13}x_1 + 2K_{23}x_2 + 2K_{33}x_3. \end{aligned} \quad (12)$$

Підставляємо вираз для похідні від функції Беллмана в рівняння Гамільтона – Якобі – Беллмана, отримуємо:

$$\begin{aligned} q_1x_1^2 + q_2x_2^2 + q_3x_3^2 + (2K_{11}x_1 + 2K_{12}x_2 + 2K_{13}x_3)(-a_1x_1 + a_2x_2) + \\ + (2K_{12}x_1 + 2K_{22}x_2 + 2K_{23}x_3)a_3x_3 + (2K_{13}x_1 + 2K_{23}x_2 + \\ + 2K_{33}x_3)(-a_4x_2 - a_5x_3) = \frac{b^2}{4r} (2K_{13}x_1 + 2K_{23}x_2 + 2K_{33}x_3)^2 \end{aligned} \quad (13)$$

Розкриваємо дужки, при цьому рівняння Гамільтона – Якобі – Беллмана трансформується до вигляду:





$$\begin{aligned}
 & q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + q_3 x_3^2 - 2K_{11} a_1 x_1^2 - 2K_{12} a_1 x_1 x_2 - 2K_{13} a_1 x_1 x_3 + \\
 & + 2K_{11} a_2 x_1 x_2 + 2K_{12} a_2 x_2^2 + 2K_{13} a_2 x_2 x_3 + 2K_{12} a_3 x_1 x_3 + \\
 & + 2K_{22} a_3 x_2 x_3 + 2K_{23} a_3 x_3^2 - 2K_{13} a_4 x_1 x_2 - 2K_{23} a_4 x_2^2 - 2K_{33} a_4 x_2 x_3 - \\
 & - 2K_{13} a_5 x_1 x_2 - 2K_{23} a_5 x_2 x_3 - 2K_{33} a_5 x_3^2 = \\
 & = \frac{b^2}{r} K_{13}^2 x_1^2 + \frac{b^2}{r} K_{23}^2 x_2^2 + \frac{b^2}{r} K_{33}^2 x_3^2 + \\
 & + \frac{2b^2}{r} K_{13} K_{23} x_1 x_2 + \frac{2b^2}{r} K_{23} K_{33} x_2 x_3 + \frac{2b^2}{r} K_{13} K_{33} x_1 x_3
 \end{aligned} \tag{14}$$

Далі прирівнюємо коефіцієнти при однакових ступенях відповідних коефіцієнтів квадратичної форми, отримуємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{aligned}
 x_1^2 : q_1 - 2K_{11} a_1 &= b^2 r^{-1} K_{13}^2, \\
 x_2^2 : q_2 + 2K_{12} a_2 - 2K_{23} a_4 &= b^2 r^{-1} K_{23}^2 \\
 x_3^2 : q_3 + 2K_{23} a_3 - 2K_{33} a_5 &= b^2 r^{-1} K_{33}^2 \\
 x_1 x_2 : -2K_{12} a_1 + 2K_{11} a_2 - 2K_{13} a_4 - 2K_{13} a_5 &= 2b^2 r^{-1} K_{13} K_{23} \\
 x_1 x_3 : -2K_{13} a_1 + 2K_{12} a_3 &= 2b^2 r^{-1} K_{13} K_{33} \\
 x_2 x_3 : 2K_{13} a_2 + 2K_{22} a_3 - 2K_{33} a_4 - -2K_{23} a_5 &= 2b^2 r^{-1} K_{23} K_{33} x_2 x_3
 \end{aligned} \tag{15}$$

Вирішуючі цю систему квадратичних рівнянь отримуємо необхідні значення коефіцієнтів, в тому числі й ті, що фігурують в вихідному законі оптимального керування.

$$u_{pz} = -br^{-1}(K_{13}x_1 + K_{23}x_2 + K_{33}x_3). \tag{16}$$

Вирішення системи рівнянь Ріккати та знаходження коефіцієнтів оптимального регулятора можлива з використанням програмного забезпечення MATLAB із використанням команд LQR та CARE. При цьому необхідно отримати математичну модель, що описує динамічні характеристики системи стабілізації зусилля різання у матричній формі.

Для нашого випадку в загальному випадку матричне диференційне рівняння, що описує систему стабілізації має вигляд:

$$\dot{X} = AX + BU, \tag{17}$$

де  $A = \begin{bmatrix} -a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \\ 0 & -a_4 & -a_5 \end{bmatrix}$  - матриця динаміки, що описує динамічні

властивості системи стабілізації зусилля різання;  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix}$  - матриця керування.



Вирішимо задачу синтезу оптимального регулятора для наступних параметрів  $T_{pi3} = 0,01c$ ,  $K_{pi3} = 31,85 H/pad/c$ ,  $J = 0,05кг \cdot м^2$ ,  $T_{\mu} = 0,01c$ ,  $K_{\mu} = 0,064$ . Відповідно параметри матриці динаміки та керування запишуться:

$$a_1 = \frac{1}{T_{pi3}} = 100, \quad a_2 = \frac{K_{pi3}}{T_{pi3}} = 3185, \quad a_3 = \frac{1}{J} = 20, \quad a_4 = \frac{J}{8T_{\mu}^2} = 62,5, \quad a_5 = \frac{1}{2T_{\mu}} = 50,$$

$$b = \frac{J}{8T_{\mu}^2 \cdot K_{\mu}} = 976,6.$$

Отже підставимо отримані значення в матриці динаміки та керування, отримаємо:

$$A = \begin{bmatrix} -100 & 3185 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \\ 0 & -62,5 & -50 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 976,6 \end{bmatrix}.$$

Далі вибираємо вагові коефіцієнти, відповідно обмежень на максимальні значення вихідних змінних та керуючого впливу:

$$q_1 = F_{Z_{max}}^{-2} = 5000^{-2} = 0,00000004, \quad q_2 = \omega_{max}^{-2} = 157^{-2} = 0,000041,$$

$$q_3 = M_{max}^{-2} = 14^{-2} = 0,005, \quad r = u_{max}^{-2} = 10^{-2} = 0,01.$$

Відповідно матриці обмежень, що використовуються при проектуванні лінійно – квадратичного оптимального регулятора запишуться:

$$Q = \begin{bmatrix} 0,00000004 & 0 & 0 \\ 0 & 0,000041 & 0 \\ 0 & 0 & 0,005 \end{bmatrix}; R = [0,01].$$

Розрахунок параметрів оптимального регулятора здійснюється шляхом використання команди  $[K,S,E]=lqr(A,B,Q,R)$ . Отримаємо матрицю коефіцієнтів оптимального регулятора:

$$K = [0,000001534 \quad 0,0287 \quad 0,761].$$

Дослідимо поведінку системи стабілізації зусилля різання при подачі ступінчатого сигналу завдання методом математичного моделювання з використанням програмного забезпечення MATLAB. В якості завдання буде формування значення  $F_{Z_3} = 5000H$ . Графік перехідного процесу представлений на рисунку 3.

Очевидно, що для лінійної математичної моделі, коли двигун працює не на максимальній продуктивності, а параметри обробки варіюються несуттєво характер перехідного процесу є оптимальним, а процедура синтезу цього регулятора є досить простою. В той же час при появі суттєвих нелінійностей така поведінка системи може значно змінюватись, що потребує використання більш складних регуляторів.

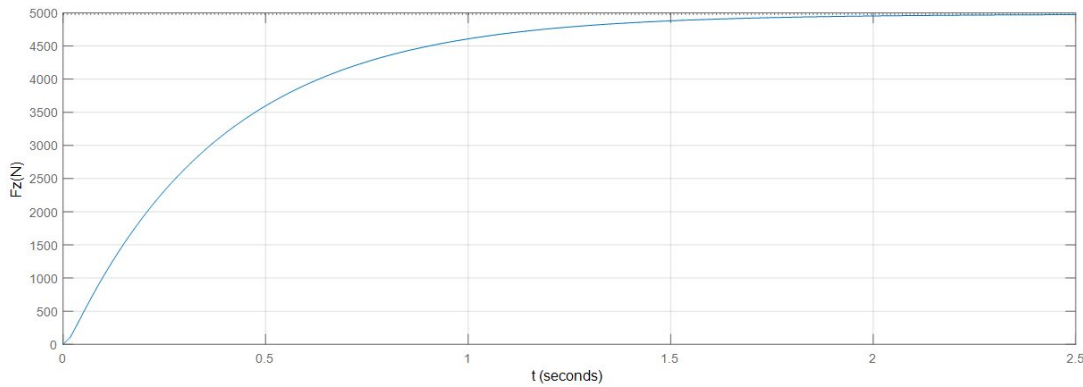


Рисунок 3. Графік перехідного процесу при стрибкообразній зміні навантаження на різець.

### 3.3. Вирішення задачі побудови лінійного адаптивного квазіоптимального регулятора для системи стабілізації зусилля різання за критерієм узагальненої роботи Красовського.

Коли електропривода подачі і головного руху працюють на максимальній продуктивності, суттєвим стає вплив обмеження на максимальну величину завдання на електропривод подачі. Це обмеження впливу фактично трансформується в появу нелінійності типу «насичення» в замкненому контурі стабілізації зусилля різання. Тому, для електроприводів металорізальних верстатів для «чорнової» обробки деталей, де вихідною координатою є зусилля різання за однією з координат математична модель має вигляд, представленому на рис.4.

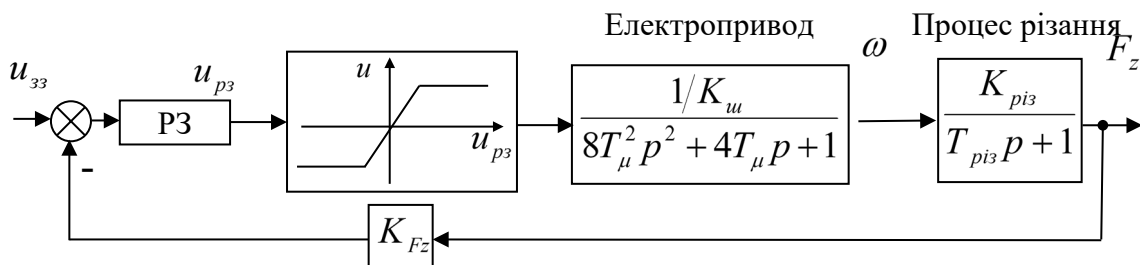


Рисунок 4 – Математична модель електроприводу переміщення робочого органу.

На рисунку 4 прийняті наступні позначення:  $u_{p3}$  - завдання за зусиллям по осі Z;  $u_{p3}$  - вихідний сигнал регулятора зусилля різання;  $\omega$  - швидкість обертання валу двигуна;  $F_z$  - складова зусилля різання по осі Z;  $K_u$  - коефіцієнт зворотного зв'язку за швидкістю;  $T_\mu$  - некомпенсована стала часу напівпровідникового перетворювача;  $K_{Fz}$  - коефіцієнт зворотного зв'язку за переміщенням,  $K_{piz}(t_p)$  - коефіцієнт підсилення процесу різання, що є функцією припуску  $t_p$ ,  $T_{piz}$  - стала часу процесу різання, P3 - регулятор зусилля.

По «чорновій» обробці та стабілізації тангенціальної складової зусилля



різання величина  $T_{piz}$  є співрозмірною, а іноді навіть і перевищує величину некомпенсованої сталої часу  $T_{\mu}$  сучасних транзисторних перетворювачів частоти. Тому, при відповідному налаштуванні регуляторів струму і швидкості, електропривод в моделі розглядається у вигляді аперіодичної ланки другого порядку. Слід відзначити, що контур швидкості в даному випадку відповідає налаштуванню на модульний або технічний оптимум, оскільки астатизм системи за швидкістю не є необхідним.

Оскільки в контурі регулювання зусилля різання міститься одна суттєва нелінійність типу «насичення», це унеможливує використання класичних методів синтезу регулятора. Крім того, варіація коефіцієнту підсилення  $K_{piz}(t_p)$  від припуску має періодичний характер внаслідок ексцентриситету заготовки.

Для суттєвої нелінійності типу «насичення» та при здійсненні процедури лінеаризації «в точці» отримаємо,  $u = K(u_{p3})u_{p3}$ , де  $K(u_{p3})$  - коефіцієнт лінеаризації, що буде обраховуватися в системі керування в реальному часі. Так само будемо обраховувати коефіцієнт підсилення процесу різання  $K_{piz}(t_p)$  при зміні припуску, що буде відслідковуватися відповідним датчиком.

З урахуванням лінеаризації запишемо модель керованого об'єкта у вигляді системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \dot{F}_z &= -T_{piz}^{-1} F_z K_{piz}(t_p) T_{piz}^{-1} \omega; \\ \dot{\omega} &= MJ^{-1}; \\ \dot{M} &= -0,5T_{\mu}^{-1} M - 0,125JT_{\mu}^{-2} \omega + 0,125JK(u_{p3})T_{\mu}^2 K_u^{-1} u_{p3}, \end{aligned} \quad (18)$$

де  $M$  - крутний момент двигуна, що визначається безпосередньо перетворювачем за математичною моделлю двигуна та може бути переданий у зовнішню систему керування;  $J$  - сумарний момент інерції електроприводу.

Представимо математичну модель контуру стабілізації зусилля різання у форматі запису із змінними стану, отримуємо:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a_1 x_1 + a_2 x_2; \\ \dot{x}_2 &= a_3 x_3; \\ \dot{x}_3 &= -a_4 x_2 - a_5 x_3 + b(u_{p3})u_{p3}, \end{aligned} \quad (19)$$

де  $x_1 = F_z$ ,  $x_2 = \omega$ ,  $x_3 = M$ ,  $a_1 = T_{piz}^{-1}$ ,  $a_2 = K_{piz}(t_p)T_{piz}^{-1}$ ,  $a_3 = J^{-1}$ ,  $a_4 = 0,125T_{\mu}^{-2}$ ,  $a_5 = 0,5T_{\mu}^{-1}$ ,  $b = 0,125JK(u_{p3})T_{\mu}^2 K_u^{-1}$ .

Для електроприводів металообробних верстатів найчастіше пред'являються вимоги підвищеної точності відпрацювання сигналу завдання з обмеженням допустимих значень швидкості і моменту двигуна. Відповідно до цього можна рекомендувати в якості критерії оптиманої роботи електроприводу використовувати критерій мінімальної динамічної похибки з урахуванням обмеження на керування. При цьому для отриманої математичної моделі критерій оптимальності запишемо у наступній формі:



$$\min_{u_{p3}} J = \int_0^{\infty} \left[ \sum_{i=1}^3 \alpha_i x_i^2 + c u_{p3}^2 \right] dt. \quad (19)$$

де  $\alpha_i$  - вагові коефіцієнти, що формують обмеження за змінні стану в процесі регулювання;  $c$  - ваговий коефіцієнт, що формує обмеження на керуючий вплив.

Процедура пошуку оптимального закону для об'єкту та функціоналу якості відома як процедура аналітичного конструювання оптимального регулятора і базується на вирішенні задачі Льютова О.М. Для лінеаризованої системи диференціальних рівнянь та квадратичного функціоналу якості оптимальний регулятор в загальній формі описуватиметься виразом:

$$u_{p3} = - \sum_{i=1}^3 K_i x_i, \quad (20)$$

де  $K_i$  - коефіцієнти регулятора, що визначаються з алгебраїчної системи рівнянь Ріккати.

Сама система рівнянь Ріккати для даного випадку буде складатись з чотирьох квадратичних рівнянь, що матиме декілька рішень, адже до стійкості системи приводитиме лише одне з них. Із врахуванням часу обчислення коефіцієнтів лінеаризації, вирішення системи квадратичних рівнянь, а також перевірки рішення на стійкість система керування швидкодіючими позиційними електроприводами може працювати із суттєвим запізненням, що впливатиме на якість роботи в цілому.

Тому, для спрощення задачі аналітичного конструювання рекомендується використовувати критерій узагальненої роботи О.О.Красовського, що для заданого об'єкту матиме вигляд:

$$\min_{u_{pn}} J = \int_0^{\infty} \left[ \sum_{i=1}^3 \alpha_i x_i^2 + c u_{pn}^2 + c u_{onn}^2 \right] dt, \quad (21)$$

де  $c_{onn} u_{onn}^2$  - обмеження на оптимальне керування, що суттєво не впливає на змінні стану під час регулювання, але значно дозволяє спростити процедуру обчислення закону оптимального регулятора.

Складаємо з урахуванням вищевказаного функціоналу якості модифіковане функціональне рівняння Белмана:

$$\begin{aligned} \min_{u_{pn}} & [\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 + c u_{p3}^2 + c u_{onn}^2 + \frac{\partial S}{\partial x_1} (-a_1 x_2 + a_2 x_2) + \\ & + \frac{\partial S}{\partial x_2} a_3 x_3 + \frac{\partial S}{\partial x_3} (-a_4 x_2 - a_5 x_3 + b(u_{p3})u_{p3})] = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Здійснюємо процедуру пошуку екстремуму для оптимального керування шляхом диференціювання функціонального рівняння Белмана  $u_{p3}$ . В результаті отримуємо вираз для оптимального керування  $u_{p3}$  в явному вигляді:



$$u_{p3} = u_{opt} = -\frac{b(u_{p3})}{2c} \frac{\partial S}{\partial x_3}. \tag{22}$$

Отриманий вираз підставляємо в модифіковане рівняння і отримуємо рівняння Гамільтона –Якобі – Белмана в замкненій формі:

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 + \frac{\partial S}{\partial x_1}(-a_1 x_1 + a_2 x_2) + \frac{\partial S}{\partial x_2} a_3 x_3 + \frac{\partial S}{\partial x_3}(-a_4 x_2 - a_5 x_3) = 0 \tag{23}$$

Рішенням цього рівняння буде функція Белмана у вигляді квадратичної форми третього порядку:

$$S = \sum_{ij=1}^3 K_i K_j x_i x_j = K_1^2 x_1^2 + 2K_{12} x_1 x_2 + 2K_{13} x_1 x_3 + K_2^2 x_2^2 + 2K_{23} x_2 x_3 + K_3^2 x_3^2 \tag{24}$$

Підставляємо в рівняння Гамільтона –Якобі – Белмана, отримуємо систему арифметричних рівнянь першого порядку, що має назву модифікованої системи рівнянь Ріккати для визначення коефіцієнтів квадратичної форми:

$$\begin{cases} a_1 K_{11} = \alpha_1 \\ -a_2 K_{12} + a_4 K_{23} = \alpha_2 \\ -a_3 K_{23} + a_5 K_{33} = \alpha_3 \\ K_{11} a_2 - a_1 K_{12} - a_4 K_{13} = 0 \\ K_{12} a_3 - (a_1 + a_5) K_{13} = 0 \\ a_2 K_{13} + a_3 K_{22} - a_5 K_{23} - a_4 K_{33} = 0 \end{cases} \tag{25}$$

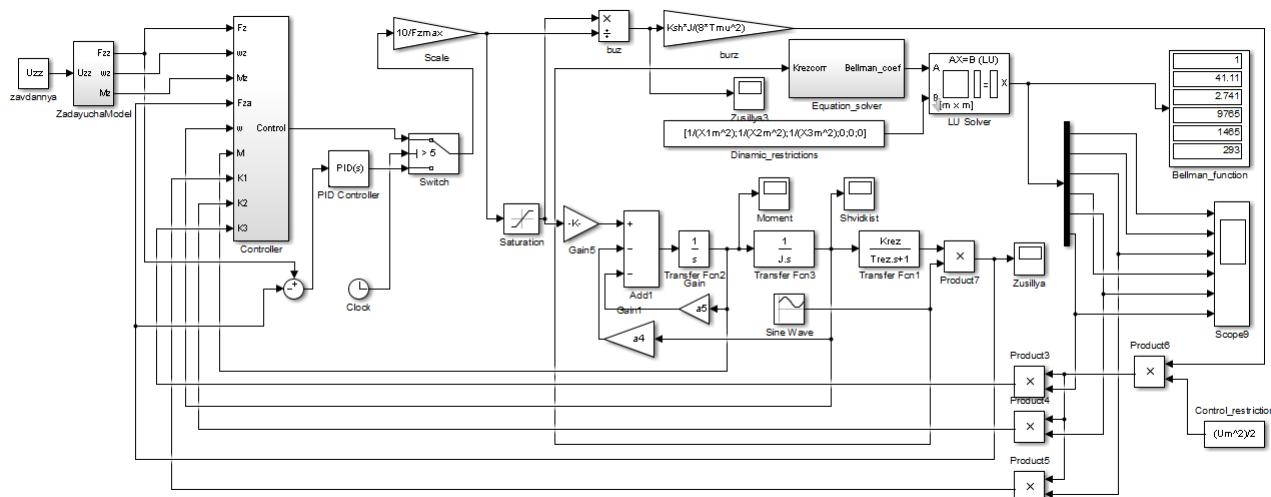
Вирішуючи цю систему рівнянь в реальному часі при зміні коефіцієнтів лінеаризації, ми отримаємо оптимальне рішення для кожної точки фазового простору. Такий підхід має назву методу Пірсона і при великій швидкодії системи керування може забезпечити якісні перехідні процеси. При цьому отримані коефіцієнти передаються в алгоритм керування:

$$u_{p3} = -\frac{b(u_{p3})}{2c} (K_{13} x_1 + K_{23} x_2 + K_{33} x_3). \tag{26}$$

Дослідимо динамічні характеристики системи стабілізації зусилля різання із наступними параметрами системи:  $T_{piz} = 0,01c$ ,  $K_{piz} = 25,5..38,2$ ,  $K_{uu} = 15,7$ ,  $T_{\mu} = 0,01c$ ,  $J = 0,1$ ,  $K(u_{p3}) = 0,1..1$ .

Дослідження проведемо методом цифрового моделювання з використанням математичного пакету MATLAB та його додатку Simulink. Схема контуру стабілізації зусилля різання з запропонованим регулятором має вигляд, представлений на рис.5. На тому ж рисунку для можливості порівняння якості регулювання реалізовано пропорційно – інтегрально - диференційний – регулятор зусилля різання, що включено одразу після запуску системи. Після 5 секунди активується синтезований квазіоптимальний регулятор.





**Рисунок 5 – Структурна схема контуру стабілізації зусилля різання із синтезованим регулятором, реалізована у додатку Simulink.**

Для вирішення в реальному часі системи лінійних алгебраїчних рівнянь використовуємо функціональний блок LU Solver. Коефіцієнти матриці В є незмінними і залежать лише від вагових коефіцієнтів. При цьому самі вагові коефіцієнти в даному випадку розраховуються за методикою Мерієма:

$$\alpha_i = x_{i_{\max}}^{-2}, \quad c = u_{\max}^{-2} \tag{27}$$

де  $x_{i_{\max}}$  - максимальне відхилення і-ї координати від номінального значення,  $u_{\max}$  - максимальне відхилення керуючого впливу.

В нашому прикладі  $x_{1_{\max}} = 0,1$ ,  $x_{2_{\max}} = 15,4$ ,  $x_{3_{\max}} = 1$ ,  $u_{\max} = 0,1$ , тобто суттєві обмеження накладаються лише на складову зусилля різання  $F_z$ .

В матриці А є коефіцієнти, що залежать від величини коефіцієнту підсилення процесу різання, тобто повинні обраховуватися на кожному циклі роботи регулятора. В Simulink зміна коефіцієнту підсилення подавалась в матрицю А в якості процентного відношення відносно номінального значення. Величина Krescorr при моделюванні змінювалась за синусоїдальною зазедністю, що відповідає синусоїдальній зміні припуску внаслідок ексцентриситету деталі. Формування синусоїди здійснювалось блоком Sine\_wave.

Формування матриці А здійснювалось за допомогою блоку Equation\_solver, внутрішній вигляд якого представлений на рис.6.

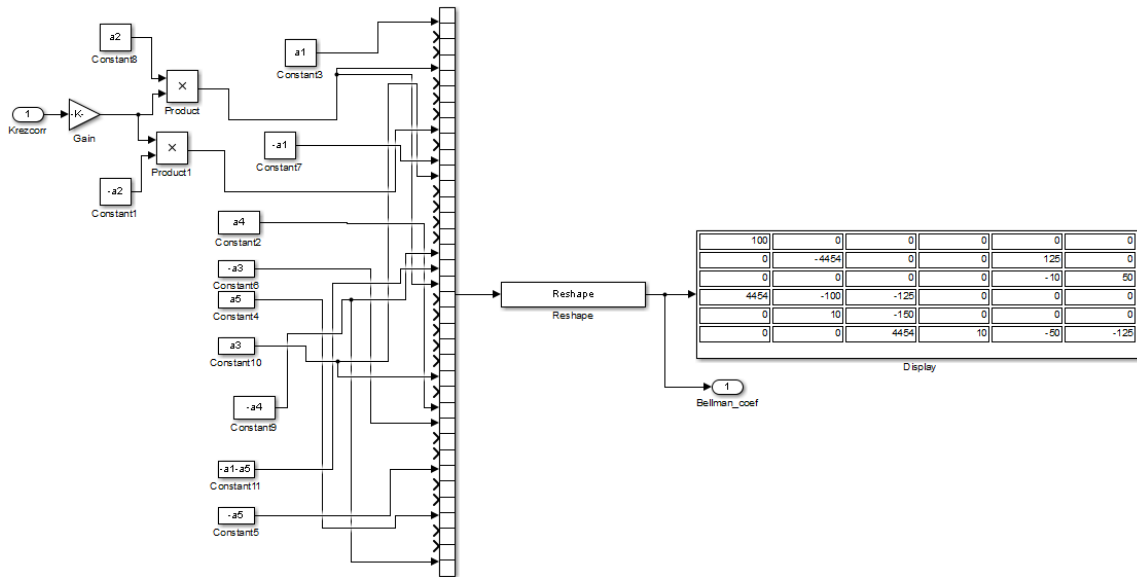
Визначення коефіцієнту  $K(u_{p3})$  здійснюється за наступною формулою:

$$K(u_{p3}) = sat(u_{p3})u_{p3}^{-1}, \tag{28}$$

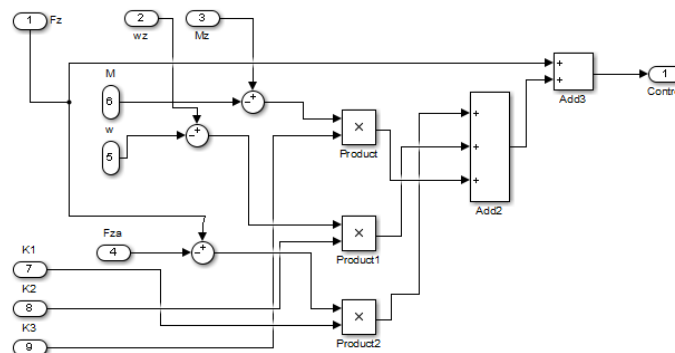
де  $sat(u_{p3})$  - вихідний сигнал регулятора зусилля з урахуванням блоку обмеження saturation.

Далі значення  $K(u_{p3})$  множиться на вираз в блоці burz, на сталу обмеження на керування и подається на блоки множення з відповідними коефіцієнтами функції Белмана. Отримані змінні подаються в блок Controller для формування

керуючого впливу. Внутрішня структура функціонального блоку controller представлена на рис.7.



**Рисунок 6 – Блок Equation\_solver для визначення коефіцієнтів матриці A модифікованої системи рівнянь Ріккати.**



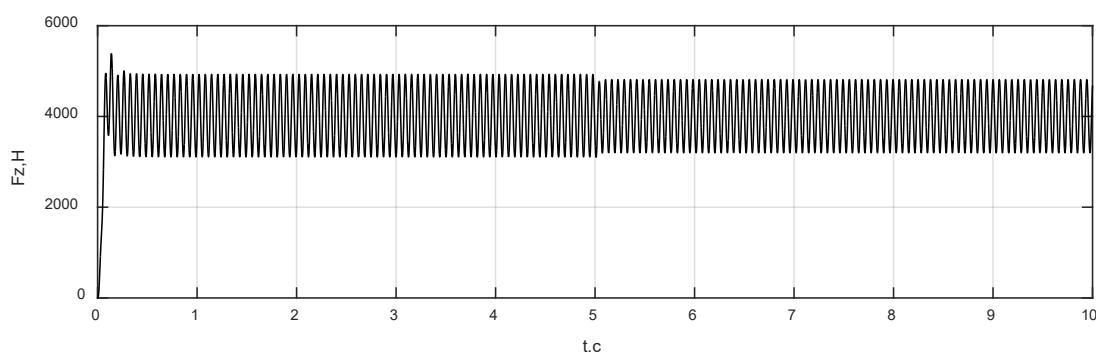
**Рисунок 7 – Структура блоку керування зусиллям різання.**

В даному блоці реалізується алгоритм керування шляхом формування задаючого сигналу за зусиллям різання і керуючих впливів за змінними стану. При цьому слід розуміти, що вирішення класичної задачі Льютова забезпечується на основі відхилень за змінними стану, тобто необхідно сформувати різниці між поточними значеннями та еталонними для ідеального процесу. В якості ідеального перехідного процесу розглядаємо безінерційний процес зміни швидкості та зусилля різання, тобто з нульовою динамічною похибкою. Формування еталонних сигналів здійснюється у блоці ZadayuchaModel. Графік перехідного процесу за зусиллям різання при використанні запропонованого регулятора представлений на рис.8.

Можна побачити, що при використанні синтезованого регулятора коливання зусилля різання при зміні припуску значно зменшуються, що підвищує продуктивність системи, сприяє зменшенню зносу різця. Подальше покращення перехідного процесу можливе за рахунок використання



нелінійного регулятора зусилля різання.



**Рисунок 8 – Графік перехідного процесу за зусиллям різання при використанні ПД – регулятора (до 5с моделювання) та синтезованого регулятора.**

### 3.4. Вирішення задачі побудови нелінійного квазіоптимального регулятора для системи стабілізації зусилля різання за критерієм узагальненої роботи.

Вищевказаний запропонований регулятор містить лише лінійні складові від змінних стану, параметри яких змінюються у незначних межах. Відповідно до цього отриманий алгоритм керування реалізується на класі лінійних функцій, що не дозволяє забезпечити робастність рішення для суттєвих коливань внутрішніх параметрів. Це підтверджується результатами моделювання, отриманими раніше.

Другим суттєвим недоліком такого підходу є те, що при великих лінійних швидкостях обертання деталі значно зменшується стала  $T_{piz}$  і відповідно до цього значно підвищуються вимоги до швидкодії контролера, що обчислює рішення для системи алгебраїчних рівнянь.

Внаслідок цього, при значних коливаннях припуску або великих швидкостей обертання виникає необхідність реалізації нелінійного квазіоптимального регулятора із детермінованими коефіцієнтами.

Розглянемо процедуру синтезу квазіоптимального регулятора для системи, отриманої в результаті лінеаризації нелінійних залежностей і варіацій параметрів:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a_1 x_1 + a_2 x_2; \\ \dot{x}_2 &= a_3 x_3; \\ \dot{x}_3 &= -a_4 x_2 - a_5 x_3 + b(u_{p3})u_{p3}, \end{aligned} \tag{29}$$

$$\text{де } x_1 = F_z, x_2 = \omega, x_3 = M, a_1 = \frac{1}{T_{pez}}, a_2 = \frac{K_{piz}(t_p)}{T_{piz}}, a_3 = \frac{1}{J}, a_4 = \frac{J}{8T_\mu^2}, a_5 = \frac{1}{2T_\mu}$$

$$, b = \frac{JK(u_{p3})}{8T_\mu^2 \cdot K_u}$$

Вирішимо задачу синтезу квазіоптимального регулятора шляхом



використання методу «занурення», запропонованої в роботах Ю.Ту [12]. Відповідно до цього методу вирішується задача аналітичного конструювання оптимального регулятора для змінних параметрів і коефіцієнтів лінеаризації для різних областей фазового простору. Так, спочатку здійснюється лінеаризацію нелінійності «типу насичення» методом «січних». Відзначимо, що коефіцієнти лінеаризації  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  фактично визначають поведінку переміщення робочої точки та параметрів функції Беллмана – Ляпунова для фіксованих областей фазового простору. Визуалізація методу «січних» та заміни нелінійної залежності прямими для різних значень вхідного сигналу представлені на рисунку 9. При цьому фактично коефіцієнт «миттєвої» лінеаризації трансформується в «ступінчасту» функцію, загальний вигляд якої представлений на рисунку 10.

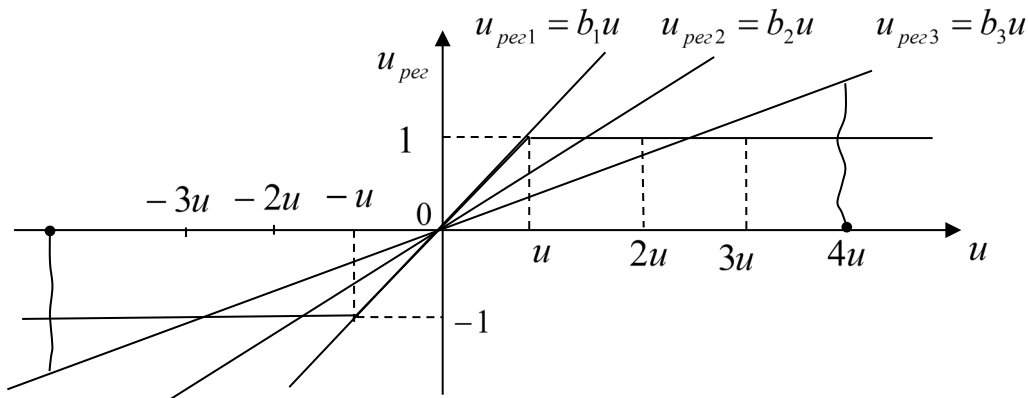


Рисунок 9 – Лінеаризація нелінійності методом «січних».

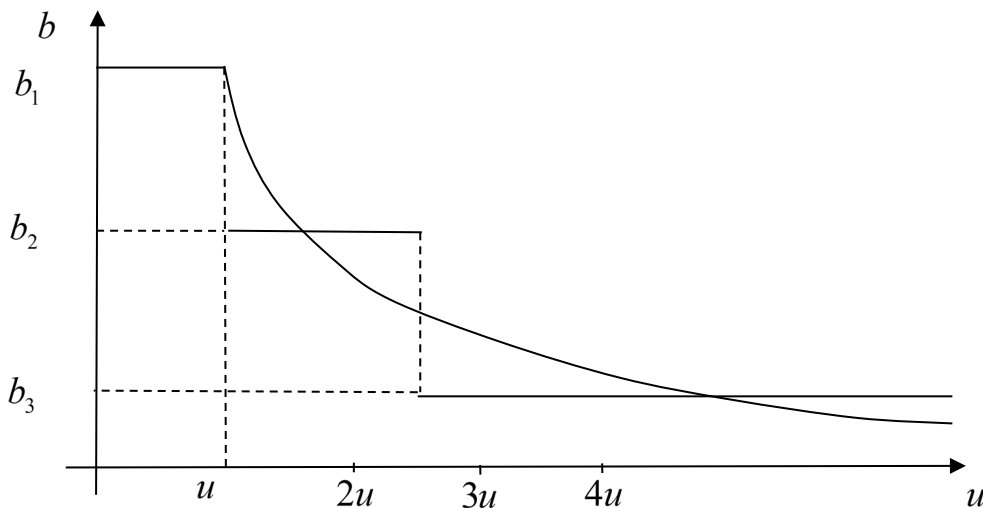


Рисунок 10 – Графік зміни коефіцієнту «миттєвої» лінеаризації.

Зрозуміло, що із збільшенням кількості «січних» при здійсненні процедури лінеаризації, збільшується точність квазіоптимального рішення. В той же самий час, це суттєво ускладнить алгоритм керування і, відповідно, його програмну реалізацію. Саме тому, лінеаризація методом «січних» здійснюється на граничних областях фазового простору «в малому» та «у великому».

Область «в малому» відповідає області мінімальних значень змінних стану, при яких стає несуттєвим вплив однозначних нелінійних залежностей і варіацій



параметрів, а складові закону керування вищого порядку невеликуються внаслідок їх малості при зведенні в степінь.

Область «у великому» відповідає максимально можливим відхиленням змінних стану та змінних параметрів від номінальних значень. Вирішення задачі аналітичного конструювання для максимальних значень відхилень теж призводить до отримання лінійного закону керування, оскільки відповідає незмінним у вузькому діапазоні значенням параметрів та фіксованим значенням нелінійностей. Так, наприклад, для нелінійності типу «насичення» для дуже великих значень аргументу коливання коефіцієнту лінеаризації стають несуттєвими.

Основною проблемою розробки оптимальних регуляторів є визначення алгоритму керування при переміщенні зображальної точки із області «у великому» в область «у малому». І тут існує багато рішень цієї задачі. Так, при використанні методу Пірсона алгоритм перераховується на кожному циклі роботи контролера. В багатьох роботах пропонується розділити керування в часі із формуванням параметрів регулятора як функцій часу. Одним з найцікавіших підходів є метод В.Ф. Кудіна, що дозволяє отримати детерміновані коефіцієнти [8].

При цьому методі відбувається оптимізація коефіцієнтів регулятора, тобто оптимізується не траєкторія руху зображальної точки, а параметри закону оптимального керування, що стають функціями змінних стану при переміщенні з області «у великому» в область «у малому». Це в свою чергу, призводить до оптимізації поведінки системи в цілому, а саме оптимальний рух робочих точки в граничних режимах, та квазіоптимальний рух між цими режимами.

Вирішимо задачу побудови оптимального регулятора для системи стабілізації зусилля різання, що описується математичною моделлю, представленою в попередньому пункті.

При цьому для неї вирішимо класичну задачу Льютова з фіксованими значеннями параметра  $a_2 = K_{piz}(t_p)T_{piz}^{-1}$  та коефіцієнту керування  $b(u_{p3})$  для області «у великому» та «у малому».

В якості мінімізованого функціоналу якості вибираємо звичайний квадратичний функціонал якості без оптимальної складової Красовського:

$$\min_{u_{p3}} J = \int_0^{\infty} \left[ \sum_{i=1}^3 \alpha_i x_i^2 + cu_{p3}^2 \right] dt. \quad (30)$$

Вирішуючи окремо задачі «у малому» та «у великому» отримаємо відповідні закони керування:

$$u_{p3M} = -K_{1M}x_1 - K_{2M}x_2 - K_{3M}x_3, \quad u_{p3B} = -K_{1B}x_1 - K_{2B}x_2 - K_{3B}x_3, \quad (31)$$

де М,В – індекси коефіцієнтів керування для областей фазового простору «у малому» та «у великому».

Далі визначаємо нові допустимі керування та здійснюємо зшивання «миттєвих значень» керуючих впливів «у великому» та «у малому»  $u_{p3B}, u_{p3M}$ , що



є справедливими для граничних областей фазового простору. Коефіцієнти регулятора  $K_1, K_2, K_3$  є функціями змінних стану, тому керуючими діями призначаємо варіації параметрів  $\Delta K_1, \Delta K_2, \Delta K_3$ . Тоді керування «у великому», що буде справедливим для максимальних відхилень змінних стану запишеться у вигляді:

$$u_{pзB} = -\left(\sum_{i=1}^3 K_i x_i + \sum_{j=1}^3 \Delta K_j x_j\right) \quad (32)$$

Для спрощення обчислення коефіцієнтів при змінних стану, що визначають варіації параметрів керування, використовуємо мінімізований некласичний функціонал (критерій узагальненої роботи Красовського О.О.) [14], що має вигляд:

$$\min_{\Delta k_1, \dots, \Delta k_3} J_3 = \int_0^{\infty} \left[ \sum_{i=1}^3 \alpha_i x_i^2 + \sum_{j=1}^3 c_j \Delta k_j^2 + \sum_{j=1}^3 \frac{x_j^2}{4c_j} \cdot \left( b_B \frac{\partial S}{\partial x_3} \right)^2 \right] dt. \quad (33)$$

Підставляючи вираз для керування «у великому» в систему диференціальних рівнянь, що описує динамічні властивості об'єкту, отримуємо:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a_1 x_1 + a_2 x_2; \\ \dot{x}_2 &= a_3 x_3; \\ \dot{x}_3 &= -a_4 x_2 - a_5 x_3 - b_B \left( \sum_{i=1}^3 K_i x_i + \sum_{j=1}^3 \Delta K_j x_j \right), \end{aligned} \quad (34)$$

Для системи рівнянь, що описує динамічні властивості системи і мінімізованого функціоналу якості, складаємо функціональне рівняння Беллмана:

$$\begin{aligned} \min_{\Delta k_1, \dots, \Delta k_3} & \left[ \sum_{i=1}^3 \alpha_i x_i^2 + \sum_{j=1}^3 c_j \Delta k_j^2 + \sum_{j=1}^3 \frac{x_j^2}{4c_j} \left( b_B \frac{\partial S}{\partial x_3} \right)^2 \right. \\ & + \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot (-a_1 x_1 + a_2 x_2) + \frac{\partial S}{\partial x_2} x_3 + \\ & \left. + \frac{\partial V}{\partial x_3} \cdot (-a_4 x_2 - a_5 x_3 - b_B \sum_{i=1}^3 K_i x_i - b_B \sum_{j=1}^3 \Delta K_j x_j) \right] = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

Реалізуючи процедуру пошуку екстремуму шляхом взяття похідних за кожною з варіацією параметру керування, отримуємо:

$$\Delta K_1 = \frac{b_B}{2c_1} \cdot \frac{\partial S}{\partial x_3} \cdot x_1, \Delta K_2 = \frac{b_B}{2c_2} \cdot \frac{\partial S}{\partial x_3} \cdot x_2, \Delta K_3 = \frac{b_B}{2c_3} \cdot \frac{\partial S}{\partial x_3} \cdot x_3, \quad (36)$$

Підставляючи вирази оптимальних змін варіацій параметрів в явному вигляді (36) в модифіковане рівняння (35) і отримуємо модифікацію рівняння





Гамільтона – Якобі – Белмана в замкненій формі.

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i x_i^2 + \frac{\partial S}{\partial x_1} \cdot (-a_1 x_1 + a_2 x_2) + \frac{\partial S}{\partial x_2} x_3 + \frac{\partial S}{\partial x_3} \cdot (-a_4 x_2 - a_5 x_3 - b_B \sum_{i=1}^3 K_i x_i) = 0 \quad (37)$$

Рішення рівняння (37) будемо шукати в вигляді квадратичної форми:

$$S = \sum_{ij=1}^3 S_{ij} x_i x_j = S_{11} x_1^2 + 2S_{12} x_1 x_2 + 2S_{13} x_1 x_3 + S_{22} x_2^2 + 2S_{23} x_2 x_3 + S_{33} x_3^2 \quad (38)$$

Підставляємо квадратичну форму у рівняння Гамільтона – Якобі – Белмана:

$$\begin{aligned} & \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 + (2S_{11} x_1 + 2S_{12} x_2 + 2S_{13} x_3) \cdot (-a_1 x_1 + a_2 x_2) + \\ & + (2S_{12} x_1 + 2S_{22} x_2 + 2S_{23} x_3) x_3 + \\ & + (2S_{13} x_1 + 2S_{23} x_2 + 2S_{33} x_3) \cdot (-a_4 x_2 - a_5 x_3 - b_B \sum_{i=1}^3 K_i x_i) = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

Далі здійснюємо процедуру відкривання дужок, отримуємо:

$$\begin{aligned} & \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 - 2S_{11} a_1 x_1^2 - 2S_{12} a_1 x_1 x_2 - 2S_{13} a_1 x_1 x_3 + \\ & + 2S_{11} a_2 x_1 x_2 + 2S_{12} a_2 x_2^2 + 2S_{13} a_2 x_2 x_3 + 2S_{12} x_1 x_3 + 2S_{22} x_2 x_3 + 2S_{23} x_3^2 + \\ & - 2S_{13} a_4 x_1 x_2 - 2S_{23} a_4 x_2^2 - 2S_{33} a_4 x_2 x_3 - 2S_{13} a_5 x_1 x_3 - 2S_{23} a_5 x_2 x_3 - 2S_{33} a_5 x_3^2 - \\ & - 2S_{13} K_{1M} b_B x_1^2 - 2S_{23} K_{1M} b_B x_1 x_2 - 2S_{33} K_{1M} b_B x_1 x_3 - \\ & - 2S_{13} K_{2M} b_B x_1 x_2 - 2S_{23} K_{2M} b_B x_2^2 - 2S_{33} K_{2M} b_B x_2 x_3 - \\ & - 2S_{13} K_{3M} b_B x_1 x_3 - 2S_{23} K_{3M} b_B x_2 x_3 - 2S_{33} K_{3M} b_B x_3^2 = 0 \end{aligned} \quad (40)$$

Далі прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях змінних стану:

$$\begin{aligned} x_1^2 : & \alpha_1 - 2S_{11} a_1 - 2S_{13} K_{1M} b_B = 0 \\ x_1 x_2 : & -2S_{12} a_1 + 2S_{11} a_2 - 2S_{13} a_4 - 2S_{23} K_{1M} b_B - 2S_{13} K_{2M} b_B = 0 \\ x_2^2 : & \alpha_2 - 2S_{23} a_4 - 2S_{23} K_{2M} b_B + 2S_{12} a_2 = 0 \\ x_1 x_3 : & -2S_{13} a_1 + 2S_{12} - 2S_{13} a_5 - 2S_{33} K_{1M} b_B - 2S_{13} K_{3M} b_B = 0 \\ x_2 x_3 : & 2S_{13} a_2 + 2S_{22} - 2S_{33} a_4 - 2S_{23} a_5 - 2S_{33} K_{2M} b_B - 2S_{23} K_{3M} b_B = 0 \\ x_3^2 : & \alpha_3 + 2S_{23} - 2S_{33} a_5 - 2S_{33} K_{3M} b_B = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

Отримані значення коефіцієнтів функції Беллмана  $S_{ij}$  підставляємо в вираз для регулятора зусилля різання, тоді рівняння регулятора в загальному випадку має вигляд:

$$u = \sum_{i=1}^3 k_i x_i + \sum_{i=1}^3 \left( \frac{b_B}{c_1} x_1^2 + \frac{b_B}{c_2} x_2^2 + \frac{b_B}{c_3} x_3^2 \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^3 k_{j3} x_j \right). \quad (42)$$

де  $K_{j3}$  - коефіцієнти квадратичної форми, що отримані при «зшиванні» рішень «у великому» та «у малому»;



$K_i$  - коефіцієнти квадратичної форми, що отримані при рішенні задачі «у малому».

Вирішимо задачу побудови квазіоптимального регулятора для значень, представлених в попередньому прикладі та порівняємо результати:

В нашому прикладі  $x_{1\max} = 0,1$ ,  $x_{2\max} = 15,4$ ,  $x_{3\max} = 1$ ,  $u_{\max} = 0,1$ ,  $T_{pi3} = 0,01c$ ,  $K_{pi3} = 25,5..38,2$ ,  $K_{uu} = 15,7$ ,  $T_{\mu} = 0,01c$ ,  $K(u_{pz}) = 0,1..1$ .

Звідси коефіцієнти динаміки та керування визначаються за формулами:

$$a_1 = \frac{1}{T_{pez}} = 100, a_2 = \frac{K_{pi3}(t_p)}{T_{pi3}} = 2550..3820, \quad a_3 = \frac{1}{J} = 10, \quad a_4 = \frac{J}{8T_{\mu}^2} = 100000,$$

$$a_5 = \frac{1}{2T_{\mu}} = 50, b = \frac{JK(u_{pz})}{8T_{\mu}^2 \cdot K_{uu}} = 203..304.$$

Оскільки процедура синтезу з використанням методу «занурення» працює для детермінованих коефіцієнтів динаміки та керування, приймає усереднене значення для параметру матриці динаміки  $a_2 = 3200$  та мінімальне значення для параметру матриці керування  $b = 203$ .

Визначення коефіцієнтів оптимального регулятора «в малому» доцільно здійснювати методами матричного обчислення за допомогою прикладного програмного забезпечення MATLAB.

Складемо матриці динаміки, керування та, відповідно, обмежень відповідного квадратичного функціоналу якості:

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \\ 0 & -a_4 & -a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 & 3200 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & -100000 & -50 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 203 \end{bmatrix};$$

$$Q = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0,00422 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad R = [c_1] = [100]; \quad N = [0]$$

В загальному випадку матричне рівняння Ріккати для області «в малому» має вигляд:

$$A^T S + SA - (SB + N)R^{-1}(B^T S + N^T) + Q = 0. \tag{43}$$

Оптимальна матриця керування в загальному вигляді запишеться:

$$K = R^{-1}(B^T S + N^T). \tag{44}$$

Вирішення задачі пошуку рішення рівняння Ріккати здійснюється в програмному забезпеченні MATLAB. При цьому використовується команда LQR, тобто визначаються параметри лінійно – квадратичного регулятора, що забезпечке оптимальну повідінку відпрацювання заданого сигналу при квадратичному критерії якості та лінійному об’єкті керування.



Лістинг файлу в MATLAB, що виконує розрахунок параметрів матриці має вигляд:

```
A=[-100 3200 0;0 0 10;0 -100000 -50];%матриця динаміки
V=[0;0;203]; %матриця керування
Q=[100 0 0;0 0.00422 0;0 0 1];%матриця обмежень на змінні стану
R=[100]; %матриця обмежень на керування
N=[0]; %матриця впливу керування на змінні стану
[K,S,E]=lqr(A,B,Q,R,N); %команда пошуку коефіцієнтів матриці оптимального керування
```

Оптимальна матриця керування запишеться в наступній формі:

$$K = [0,032 \quad 0,0158 \quad 0,0224].$$

Далі визначимо значення коефіцієнтів обмеження на оптимальні зміни коефіцієнтів регулятора. При цьому використовуємо метод Меррієма для змінних стану [7]:

$$c_1 = \Delta k_{1\max}^{-2}, \quad c_2 = \Delta k_{2\max}^{-2}, \quad c_3 = \Delta k_{3\max}^{-2}. \quad (45)$$

Виходячи з положення, що кубічна складова має мати тей ж самий вплив на поведінку системи, що й лінійна, вибираємо значення обмежень з виразу:

$$\Delta k_{i\max} = \frac{b_B}{c_i} K_i x_{i\max}^2. \quad (46)$$

В цьому випадку отримуємо загальну наближену формулу для визначення обмежень на оптимальні зміни параметрів регулятора:

$$c_i = \frac{1}{\left(\frac{b_B}{c_i} K_i x_{i\max}^2\right)^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{(b_B K_i x_{i\max}^2)^2}}. \quad (47)$$

Звідси визначаємо значення кожного з обмежень:

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{(203 \cdot 0,032 \cdot 0,1^2)^2}} = 0,1616; \quad c_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{(203 \cdot 0,0158 \cdot 15,4^2)^2}} = 9,128;$$

$$c_3 = \frac{1}{\sqrt[3]{(203 \cdot 0,0224 \cdot 1^2)^2}} = 1,657$$

Отримані значення коефіцієнтів оптимального регулятора «в малому» підставляємо у систему лінійних алгебраїчних рівнянь для кубічних складових:

$$x_1^2 : 100 - 200S_{11} - 12,992S_{13} = 0$$

$$x_1 x_2 : -200S_{12} + 6400S_{11} - 200000S_{13} - 12,992S_{23} - 6,4148S_{13} = 0$$

$$x_2^2 : 0,00422 - 200000S_{23} - 6,4148S_{23} + 6400S_{12} = 0$$

$$x_1 x_3 : -200S_{13} + 2S_{12} - 100S_{13} - 12,992S_{33} - 9,0944S_{13} = 0$$

$$x_2 x_3 : 6400S_{13} + 2S_{22} - 200000S_{33} - 100S_{23} - 6,4148S_{33} - 9,0944S_{23} = 0$$

$$x_3^2 : 1 + 2S_{23} - 100S_{33} - 9,0944S_{33} = 0$$



Вирішення даної системи лінійних алгебраїчних рівнянь також доцільно здійснювати в програмному забезпеченні MATLAB, для цього представимо вищевказану систему рівнянь в матричному вигляді:

$$\begin{bmatrix} -200 & 0 & -12,992 & 0 & 0 & 0 \\ 6400 & -200 & -200000 & 0 & -12,992 & -6,4148 \\ 0 & 6400 & 0 & 0 & -200006,4148 & 0 \\ 0 & 2 & -309,0944 & 0 & 0 & -12,992 \\ 0 & 0 & 6400 & 2 & -109,0944 & 6,4148 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -109,0944 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{22} \\ S_{23} \\ S_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 \\ 0 \\ -0,0422 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Запишемо відповідно матриці:

$$M = \begin{bmatrix} -200 & 0 & -12,992 & 0 & 0 & 0 \\ 6400 & -200 & -200000 & 0 & -12,992 & -6,4148 \\ 0 & 6400 & 0 & 0 & -200006,4148 & 0 \\ 0 & 2 & -309,0944 & 0 & 0 & -12,992 \\ 0 & 0 & 6400 & 2 & -109,0944 & 6,4148 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -109,0944 \end{bmatrix}$$

Для вирішення цієї системи рівнянь використаємо наступну програму у середовищі MATLAB:

```
M=[-200 0 -12.992 0 0 0;6400 -200 -200000 0 -12.992 -6.4148;
0 6400 0 0 -200006.4148 0; 0 2 -309.0944 0 0 -12.992;
0 0 6400 2 -109.0944 6.4148;0 0 0 2 -109.0944]
```

```
N=[-100;0;-0.0422;0;0;-1]
```

```
X = linsolve(M,N)
```

Отримуємо матрицю коефіцієнтів функції Беллмана:

$$S_{ij} = [0,4991 \quad 2,1961 \quad 0,0138 \quad -40,2656 \quad 0,0703 \quad 0,0105]^T$$

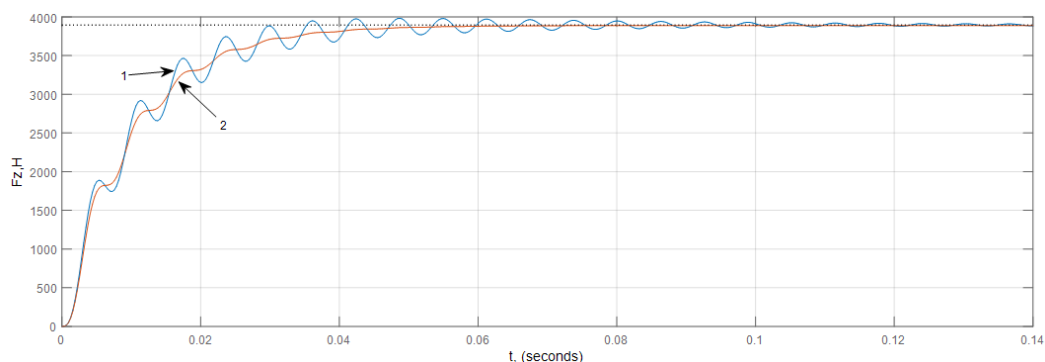
Кінцевий алгоритм нелінійного квазіоптимального керування запишеться:

$$u = -0,032x_1 - 0,0158x_2 - 0,0224x_3 - (1256x_1^2 + 22,24x_2^2 + 122,51x_3^2) \cdot (0,0138x_1 + 0,0703x_2 + 0,0105x_3)$$

Дослідження перехідних процесів здійснимо шляхом подачі ступінчатого сигналу на вхід системи. Доповнимо математичну модель об'єкта матрицею виходу по стану та матрицею виходу по керуванню  $C=[60000 \ 0 \ 0]; D=[0]$ .

При цьому здійснюємо перетворення моделі, що описує контур стабілізації зусилля різання, від матричної системи диференціальних рівнянь до передаточної функції.

Графік перехідних процесів при використанні лінійно – квадратичного регулятора без нелінійних складових, та із використанням нелінійного регулятора представлені на рисунку 11.

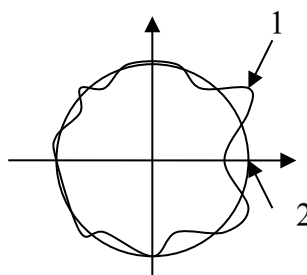


**Рисунок 11 – Графік перехідного процесу при використанні лінійного регулятора (крива 1) та із використанням нелінійного квазіоптимального регулятора (крива 2).**

Слід відзначити, що оптимальний регулятор значно підвищує якість керування, та не потребує суттєвого ускладнення реалізації системи керування.

### 3.5. Вирішення задачі побудови нелінійного квазіоптимального регулятора для системи стабілізації зусилля різання при наявності гармонічних збурень

Як було вказано вище, системи стабілізації силових параметрів найчастіше використовуються при чорновій обробці металевих заготовок. При цьому, припуск, що знімається, під час різання на токарних верстатах може змінюватись в широких межах. Переріз деталі, що обробляється, можна побачити на рисунку 12. Це, в свою чергу призводить до суттєвих коливань зусилля різання, які необхідно враховувати під час синтезу системи керування.



**Рисунок 12 – Переріз деталі, що обробляється на токарному верстаті (1 –до обробки; 2 – після обробки).**

Так, як відомо, тангенціальна складова зусилля різання може бути обчислена за формулою:

$$F_z = 9,8C_{F_z} t_p^{x_{F_z}} s^{y_{F_z}} V_{об}^n k_{F_z}, \quad (48)$$

де  $t_p$  - глибина різання (припуск), мм;  $s$  - величина подачі, що є пропорційною швидкості обертання приводу подачі, мм/об;  $V_{об}$  - швидкість різання, що є пропорційною швидкості обертання шпинделю, м/хв;  $C_{F_z}$ ,  $x_{F_z}$ ,  $y_{F_z}$ ,  $n$ ,  $k_{F_z}$  - коефіцієнти та показники степеню, що залежать від оброблюваного матеріалу, виду обробки, матеріалу ріжучого інструменту.



Для спрощення аналізу роботи системи стабілізації та процедури синтезу алгоритму керування доцільно здійснювати лінеаризацію залежності тангенціальної складової зусилля різання  $F_z$  при точінні від вхідних впливів, як керуючих, так і збурюючих: подачі  $s$ , швидкості різання  $V_{об}$  та припуску  $t_p$ . Вирази для часткових похідних від функції залежності зусилля різання від вхідних змінних, що лінеаризована в точці лінеаризації, мають вигляд:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F_z}{\partial s}\right)_0 &= 9,8 y_{F_z} C_{F_z} t_{p0}^{x_{F_z}} s_0^{y_{F_z}-1} V_{об0}^n k_{F_z}; \\ \left(\frac{\partial F_z}{\partial V_{об}}\right)_0 &= 9,8 n C_{F_z} t_{p0}^{x_{F_z}} s_0^{y_{F_z}} V_{об0}^{n-1} k_{F_z}; \\ \left(\frac{\partial F_z}{\partial t_p}\right)_0 &= 9,8 x_{F_z} C_{F_z} t_{p0}^{x_{F_z}-1} s_0^{y_{F_z}} V_{об0}^n k_{F_z}. \end{aligned} \quad (49)$$

Відповідно, лінеаризована функція залежності зусилля різання від вхідних змінних приймає вигляд:

$$\delta F_z = \left(\frac{\partial F_z}{\partial s}\right)_0 \cdot \delta s + \left(\frac{\partial F_z}{\partial V_{об}}\right)_0 \cdot \delta V_{об} + \left(\frac{\partial F_z}{\partial t_p}\right)_0 \cdot \delta t_p. \quad (50)$$

Припуск (глибину різання) можна представити як зміну радіуса обертання заготовки, тобто  $t_p = \Delta r$ . Крім того, з метою спрощення аналізу та виключення необхідності налаштування взаємопов'язаної системи електроприводів, приймаємо лінійну швидкість різання постійною, тобто  $\delta V_{об} = 0$ .

Тоді лінеаризований вираз для тангенціальної складової зусилля різання переписується в наступній формі:

$$\delta F_z = K_s \cdot \delta s + K_r \cdot \delta r. \quad (51)$$

Рівняння, що описує процес різання при наявності впливів збурення та з урахуванням інерційності процесу зняття стружки, має вигляд:

$$(T_{пиз} p + 1) \cdot F_z = K_{пиз} \cdot \omega_n + \Delta m, \quad (52)$$

де  $\Delta m$  - збурюючий вплив.

Слід відзначити, що при обробці деталі на токарному верстаті, відхилення припуску мають періодичний характер внаслідок обертання самою заготовки. При цьому частота коливань при встановленому значенні лінійної швидкості різання є однаковою для всіх збурень припуску [11]. Фактично збурення припуску при обробці деталі на токарному верстаті можуть описуватись системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \Delta \ddot{m}_1 + 2\xi_1 \omega_u \Delta \dot{m}_1 + \omega_u^2 &= \delta(t - t_1); \\ \Delta \ddot{m}_2 + 2\xi_2 \omega_u \Delta \dot{m}_2 + \omega_u^2 &= \delta(t - t_2); \\ \dots & \\ \Delta \ddot{m}_n + 2\xi_n \omega_u \Delta \dot{m}_n + \omega_u^2 &= \delta(t - t_n); \\ \Delta m &= \Delta m_1 + \Delta m_2 + \dots + \Delta m_n, i = \overline{1, n} \end{aligned} \quad (53)$$





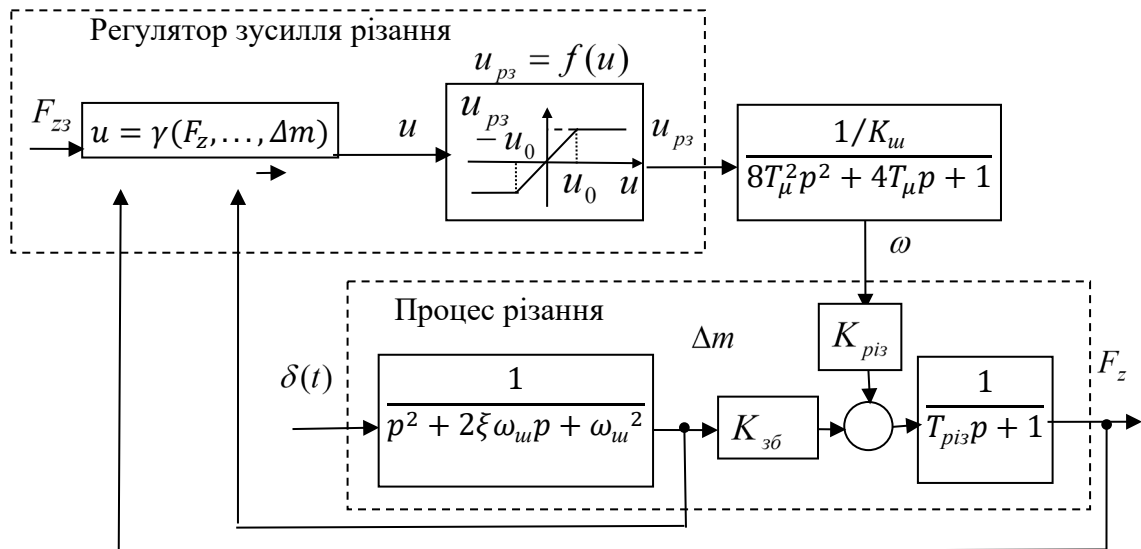
где  $\omega_{uu}$  - частота гармонійного збурення, що співпадає із швидкістю обертання шпинделю,  $\delta(t)$  - функція Дірака (імпульсна функція),  $t_i < \frac{1}{\omega_{uu}}$  - час запізнення виникнення збурення припуску відносно нульової координати,  $\Delta m_i$  - суттєве збурення припуску, що має місце на певній деталі,  $n$  - кількість суттєвих збурень припуску.

При формалізації характеру збурення виникає питання розробки квазіоптимального алгоритму керування, що забезпечує інваріантність системи, відносно цього збурення. Так, фактично постає проблема формування керуючого впливу, що компенсує гармонійні коливання параметрів різання. Цей фактор дозволяє суттєво спростити систему керування в цілому, оскільки під час синтезу можна використовувати найбільш суттєве коливання.

У випадку врахування лише однієї з складових збурення за припуском запишемо передавальну функцію впливу збурення, де вхідною функцією є послідовність імпульсів Дірака [12]:

$$W_m(p) = \frac{\Delta m}{\delta(t)} = \frac{1}{p^2 + 2\xi\omega_{uu}p + \omega_{uu}^2}. \quad (54)$$

Структурна схема контуру стабілізації зусилля різання з електроприводом постійного струму при наявності коливальних збурень зображено на рисунку 13. Контур регулювання швидкості представлений коливальною ланкою. Обмеження на виході регулятора зусилля різання описано ланкою типу «насичення».



**Рис.13. Структурна схема контуру стабілізації тангенціальної складової зусилля різання з урахуванням збурень періодичного характеру.**

На рисунку введені наступні позначення  $K_{ш}$  – коефіцієнт зворотного зв’язку за швидкістю;  $T_{\mu}$  – стала часу перетворювача;  $u$  – вихідна напруга регулятора зусилля різання без врахування обмеження;  $u_{pz}$  - вихідна напруга регулятора



зусилля різання із врахуванням обмеження;  $u_{pз} = f(u)$  – нелінійність типу «насичення»;  $u_0$  – максимальне значення напруги на виході регулятора.

Система диференційних рівнянь, що відповідає структурній схемі на рисунку 1, має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{dF_Z}{dt} &= -T_{pз}^{-1}F_Z + K_{pз}T_{pз}^{-1}\omega + K_{зб}T_{зб}^{-1}\Delta m; \\ \frac{d\omega}{dt} &= \varepsilon; \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= -0,125T_{\mu}^{-2}\omega + 0,5T_{\mu}^{-1}\varepsilon + K_u^{-1}f(\sigma); \\ \frac{d\Delta m}{dt} &= \Delta \dot{m}; \\ \frac{d\Delta \dot{m}}{dt} &= -\omega_u^2\Delta m - 2\xi\omega_u\Delta \dot{m} + \delta(t); \end{aligned} \tag{55}$$

Вибираємо мінімізований квадратичний функціонал виходячи з вимоги мінімізації динамічної похибки і енергетичних витрати енергії на управління:

$$\min_u J = \int_0^{\infty} (\sum_{i=1}^5 q_i x_i^2 + ru^2) dt. \tag{56}$$

Таким чином, виникає наступна задача. Для заданої системи диференційних рівнянь, що описує збурений рух керованого об'єкту, і мінімізованого функціоналу якості, необхідно знайти керування  $u = \gamma(x_1, \dots, x_5)$ , при якому незбурений рух  $X = 0$  є асимптотично стійким і вздовж траєкторії рух зображуючої точки, визначеною вищевказаною системою рівнянь, досягає мінімуму за  $u$  вибраний функціонал якості.

Здійснюємо синтез субоптимального регулятора контуру стабілізації зусилля різання.

Система диференційних рівнянь є нелінійною, оскільки містить нелінійну ланку, що описується рівнянням  $u_{pз} = f(u)$ . Обчислювальна складність методів аналітичного конструювання для нелінійних систем різко підвищується із порядком об'єкта керування. Тому, виникає необхідність використання методу Беллмана -Ляпунова з використанням концепції методу «занурення», що дозволяє в значній мірі зняти проблему «прокляття розмірності». При цьому складна нелінійна задача синтезу розпадається на ряд більш простих задач оптимального керування.

Здійснимо лінеаризацію вищевказаної нелінійності методом «січних». Тоді нелінійність  $u_{pз} = f(u)$  апроксимується прямою вигляду  $u_{pз} = K_{нас}(u) \cdot u$ , де  $K_{нас}(u)$  - коефіцієнт миттєвої лінеаризації. Тоді система диференціальних рівнянь (9) прийме вигляд:



$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_4; \\ \dot{x}_2 &= x_3; \\ \dot{x}_3 &= -a_4x_2 - a_5x_3 + b_1u; \\ \dot{x}_4 &= x_5; \\ \dot{x}_5 &= -a_6x_4 - a_7x_5 + \delta(t). \end{aligned} \tag{58}$$

де  $x_1 = F_z$ ,  $x_2 = \omega$ ,  $x_3 = \varepsilon$ ,  $x_4 = \Delta m$ ,  $x_5 = \Delta \dot{m}$ ;  $a_1 = T_{\text{піз}}^{-1}$ ;  $a_2 = K_{\text{піз}} \cdot T_{\text{піз}}^{-1}$ ;  $a_3 = K_{36} \cdot T_{36}^{-1}$ ;  $a_4 = (8T_{\mu}^2)^{-1}$ ;  $a_5 = (2T_{\mu})^{-1}$ ;  $a_6 = \omega_{\text{ш}}^2$ ;  $a_7 = 2\xi\omega_{\text{ш}}$ ;  $b_1 = K_{\text{нас}}(u) \cdot K_{\text{ш}}^{-1}$ .

У матричній формі система (11) буде записана:

$$\dot{X} = AX + BU, \tag{59}$$

$$\text{де } A = \begin{bmatrix} -a_1 & a_2 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a_4 & -a_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -a_6 & -a_7 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}; U = [u].$$

При цьому коефіцієнт підсилення  $b_1$  матриці  $B$  є функцією параметру лінеаризації, тобто буде змінюватися для різних областей фазового простору під час руху зображуючої точки.

Вибір вагових констант функціоналу здійснюється відповідно формуванням обмежень на середньоквадратичну похибку фазових координат і керуючого впливу, при цьому значення вагових констант визначаються за виразами:

$$q_i = x_{i\text{max}}^{-2}; r = u_{\text{max}}^{-2}. \tag{60}$$

Далі виконуємо процедуру синтезу складеного регулятора для нелінійної системи у вигляді наступної послідовності етапів:

1. Здійснюємо вирішення задачі аналітичного конструювання для області «в малому» для лінеаризованої моделі і квадратичного функціоналу якості. При цьому вирішуємо рівняння Ріккати «в малому», тобто для області фазового простору, що відповідає невеликим відхиленням фазових координат від встановлених значень. Рівняння Рікати має вигляд  $A^T S + SA - SBR^{-1}B^T S + Q = 0$ , з якого знаходимо «в малому» матрицю коефіцієнтів зворотних зв'язків  $K_1 = R^{-1}B^T S$  для випадку  $K_{\text{нас}}(u) = K_{\text{нас}1}$ . Рівняння оптимального регулятора матиме вигляд:

$$u_M = -\sum_{i=1}^5 k_i x_i. \tag{61}$$

2. Далі здійснюємо пошук рішення задачі аналітичного конструювання «у великому». Аналогічно вирішуємо рівняння Ріккати та знаходимо матрицю зворотних зв'язків  $K_2 = R^{-1}B^T S$  для випадку  $K_{\text{нас}}(u) = K_{\text{нас}2}$ . Рівняння оптимального регулятора матиме вигляд:

$$u_B = -\sum_{i=1}^5 k'_i x_i. \tag{62}$$



3. Зшивання миттєвих значень і отримання складеного нелінійного закону керування.

Визначаємо нові допустимі керування і здійснюється зшивання «миттєвих значень» керуючих впливів  $u_M$  і  $u_B$ , що є справедливими для різних областей фазового простору. При цьому рівняння регулятора «у великому» представляється у вигляді:  $u_B = u_M + \Delta u$ , де

$$\Delta u = -\sum_{i=1}^5 (k'_i - k_i)x_i = -\sum_{i=1}^5 \Delta k_i x_i \quad (63)$$

Оскільки коефіцієнти регулятора  $k_1, \dots, k_5$  є функціями змінних стану, то керуючими впливами визначаємо варіації параметрів  $\Delta k_1, \dots, \Delta k_5$ . Тоді керування «у великому» приймає вигляд:

$$u_B = -(\sum_{i=1}^5 k_i x_i + \sum_{i=1}^5 \Delta k_i x_i). \quad (64)$$

Мінімізований неklasичний функціонал Красовського вибираємо, виходячи з вимог динамічної точності та мінімальних енергетичних витрат на керування. Цим вимогам відповідає узагальнений критерій роботи О.А. Красовського, остання складова якого визначає ссобою «енергію» або узагальнену роботу оптимального керування:

$$\min_{\Delta k_1, \dots, \Delta k_5} J = \int_0^{\infty} [\sum_{i=1}^5 q_i x_i^2 + \sum_{i=1}^5 c_i \Delta k_i^2 + \sum_{i=1}^5 \frac{x_i^2}{4c_i} (b_1 \frac{\partial S_K}{\partial x_3})^2] dt. \quad (65)$$

де  $c_i = \Delta k_{imax}^{-2}$  - вагові коефіцієнти, що визначають обмеження на максимальні відхилення коефіцієнтів оптимального регулятора під час руху зображуючої точки по фазовій площині;  $S_K$  - функція Белмана, що визначається варіаціями параметрів оптимального керування.

Здійснимо замикання вихідної системи, тобто підставляємо вираз для  $u_B$  у вихідну систему диференціальних рівнянь, що описує поведінку об'єкта:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_4; \\ \dot{x}_2 &= x_3; \\ \dot{x}_3 &= -a_4 x_2 - a_5 x_3 - b_1 \left( \sum_{i=1}^5 k_i x_i + \sum_{i=1}^5 \Delta k_i x_i \right); \\ \dot{x}_4 &= x_5; \\ \dot{x}_5 &= -a_6 x_4 - a_7 x_5. \end{aligned} \quad (66)$$

Для системи рівнянь, що описують динаміку замкненого контуру стабілізації зусилля різання, рівняння Белмана має вигляд:

$$\begin{aligned} \min_{\Delta k_1, \dots, \Delta k_5} J &= \int_0^{\infty} [\sum_{i=1}^5 q_i x_i^2 + \sum_{i=1}^5 c_i \Delta k_i^2 + \sum_{i=1}^5 \frac{x_i^2}{4c_i} (b_1 \frac{\partial S_K}{\partial x_3})^2 + \frac{\partial S_K}{\partial x_1} (-a_1 x_1 + a_2 x_2 + \\ &+ a_3 x_4) + \frac{\partial S_K}{\partial x_2} x_3 + \frac{\partial S_K}{\partial x_3} (-a_4 x_2 - a_5 x_3 - b_1 \left( \sum_{i=1}^5 k_i x_i + \sum_{i=1}^5 \Delta k_i x_i \right)) - \\ &- \frac{\partial S_K}{\partial x_4} x_5 - \frac{\partial S_K}{\partial x_5} (-a_6 x_4 - a_7 x_5)] \end{aligned} \quad (67)$$



Реалізуючи процедуру мінімізації, отримаємо:

$$\Delta k_i = \frac{b_1}{2c_i} \cdot \frac{\partial S_K}{\partial x_3} \cdot x_i, i = \overline{1,5} \quad (68)$$

Модифіковане рівняння Гамільтона-Якобі-Беллмана приймає вигляд:

$$\sum_{i=1}^5 q_i x_i^2 + \frac{\partial S_K}{\partial x_1} (-a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_4) + \frac{\partial S_K}{\partial x_2} x_3 + \frac{\partial S_K}{\partial x_3} (-a_4 x_2 - a_5 x_3 - b_1 \left( \sum_{i=1}^5 k_i x_i + \sum_{i=1}^5 \Delta k_i x_i \right)) - \frac{\partial S_K}{\partial x_4} x_5 - \frac{\partial S_K}{\partial x_5} (-a_6 x_4 - a_7 x_5) = 0 \quad (69)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде квадратичной формы:

$$S_K(x_1, \dots, x_5) = \sum_{ij=1}^5 k_{ij} x_i x_j. \quad (70)$$

Реалізуючи подальшу процедуру аналітичного конструювання регулятора, визначимо коефіцієнти квадратичної форми із системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Закон квазіоптимального нелінійного керування визначиться співвідношенням:

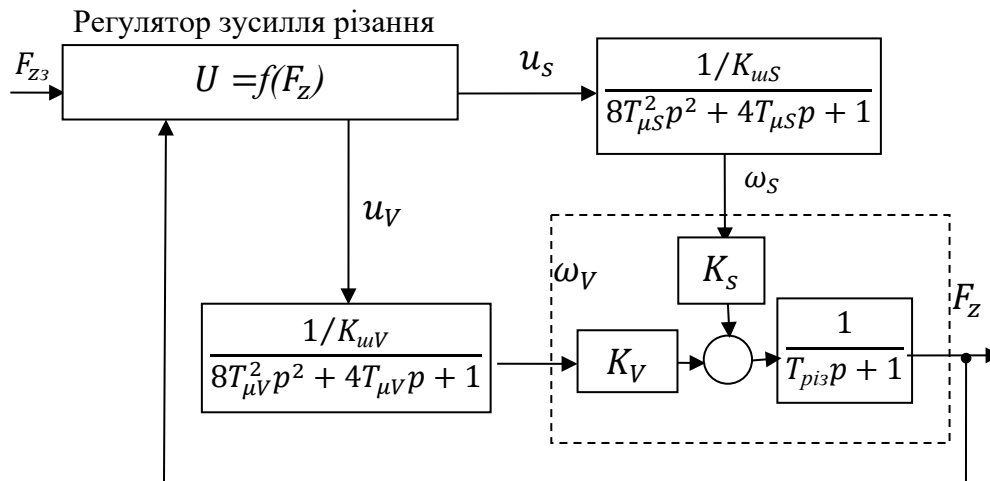
$$u_B = -\left( \sum_{i=1}^5 k_i x_i + \sum_{i=1}^5 \frac{b_1}{2c_i} \frac{\partial S_K}{\partial x_3} x_i^2 \right) = -\left( \sum_{i=1}^5 k_i x_i + \sum_{i=1}^5 x_i^2 \sum_{j=1}^5 k_{j3} x_j \right) \quad (71)$$

### 3.6. Вирішення задачі взаємопов'язаного квазіоптимального керування електроприводами металорізальних верстатів для забезпечення стабілізації зусилля різання.

Якісного підвищення точності стабілізації зусилля різання можна досягти за рахунок керування не тільки величиною подачі  $s$ , а й іншими складовими тангенціальної складової зусилля різання, наприклад припуском обробки. В той же час відпрацювання припуску є досить складною задачею, оскільки вимагає швидкої реакції приводу поперечної подачі, особливо для високих швидкостей обертання шпинделю. Іншим підходом є зміна лінійної швидкості обертання, що при обробці впливає на тангенціальну складову  $F_z = 9,8 C_{Fz} t_p^{x_{Fz}} s^{y_{Fz}} v_{об}^n k_{Fz}$ .

Контур стабілізації зусилля різання при цьому фактично отримає другий канал впливу на вихідну складову зусилля різання і отримує вигляд, представлений на рис.14.

На рис.7 введені наступні позначення:  $U = f(F_z)$  – закон нелінійного оптимального керування взаємопов'язаною системою електроприводів у векторній формі;  $u_s, u_v$  – керуючі впливи на приводи подачі та шпинделю, відповідно;  $K_{шs}, K_{шv}$  – коефіцієнти зворотного зв'язку за швидкістю для приводу подачі і приводу шпинделю, відповідно, що є функціями миттєвої лінеаризації нелінійної залежності для  $F_z$ ;  $\omega_s, \omega_v$  – швидкість обертання валу двигуна подачі і шпинделя, відповідно;  $T_{\mu s}$  та  $T_{\mu v}$  – сталі часу напівпровідникового перетворювача електропривода подачі і головного руху, відповідно.



**Рисунок 7 - Структурна схема контуру стабілізації тангенціальної складової зусилля різання з урахуванням збурень періодичного характеру.**

При цьому здійснена лінеаризація виразу для тангенціальної складової  $F_z$  методом «миттєвої» лінеаризації, та враховується інерційність процесу різання. При цьому полагаеться, що припуск під час обробки залишається сталим.

В основу лінеаризації нелінійного виразу покладене міркування щодо того, що під час різання змінні  $s, V, t_p, \dot{F}_z, \ddot{F}_z, F_z^{(n)}$  змінюються таким чином, що їх відхилення від сталих значень залишаються все ж таки досить малими.

Розкладемо функціональне рівняння динаміки процесу різання в ряд Тейлора за степенями відхилень в області сталого режиму роботи, розглядаючи  $s, V, t_p, \dot{F}_z, \ddot{F}_z, F_z^{(n)}$  як незалежні змінні, при цьому представимо тангенціальну складову зусилля різання як суму його встановленого значення та відхилень:

$$F_{z0} + \Delta F_z \approx F_{z0} + \left( \frac{\partial F_z}{\partial s} \right)_0 \cdot \Delta s + \left( \frac{\partial F_z}{\partial V} \right)_0 \cdot \Delta V + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F_z}{\partial F_z^{(i)}} \right)_0 \cdot \Delta F_z^{(i)} + \quad (72)$$

$$+ 0(s, V, \dot{F}_z, \ddot{F}_z, \dots, F_z^{(n)})$$

де  $\left( \frac{\partial F_z}{\partial s} \right)_0, \left( \frac{\partial F_z}{\partial V} \right)_0, \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F_z}{\partial F_z^{(i)}} \right)_0$  та  $0(\omega, V, \dot{F}_y, \ddot{F}_y, \dots, F_y^{(n)})$  - часткові похідні у

встановленому режимі роботи і похідні вищого порядку малості від швидкості переміщення приводу подачі, лінійної швидкості різання та похідних від тангенціальної складової зусилля різання  $i$ -го порядку, відповідно;  $\Delta F_z, \Delta \omega_2, \Delta V, \Delta F_z^{(i)}$  - відхилення тангенціальної складової зусилля різання, швидкості обертання валу приводу подачі, лінійної швидкості обертання заготовки, та похідних від тангенціальної складової зусилля різання  $i$ -го порядку. При відніманні нульової складової зусилля різання  $F_{z0}$  із лівої та правої частини рівняння та нехтуючи похідними вищого порядку малості, отримуємо лінеаризоване диференціальне рівняння процесу різання у відхиленнях:





$$\Delta F_Z \approx \left( \frac{\partial F_Z}{\partial s} \right)_0 \cdot \Delta s + \left( \frac{\partial F_Z}{\partial V} \right)_0 \cdot \Delta V + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F_Z}{\partial F_Z^{(i)}} \right)_0 \cdot \Delta F_Z^{(i)}. \quad (73)$$

Приведемо отриманий вираз до більш зручного для аналізу: Приведем полученное выражение к, более удобному для анализа, виду:

$$-\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F_Z}{\partial F_Z^{(i)}} \right)_0 \cdot \Delta F_Z^{(i)} + \Delta F_Z \approx \left( \frac{\partial F_Z}{\partial s} \right)_0 \cdot \Delta s + \left( \frac{\partial F_Z}{\partial V} \right)_0 \cdot \Delta V. \quad (74)$$

Вирази для часткових похідних від тангенціальної складової зусилля різання за швидкістю переміщення валу привода подачі та лінійної швидкості обертання заготовки мають вигляд:

$$\left( \frac{\partial F_Z}{\partial s} \right)_0 = 9,8 y_{F_Z} C_{F_Z} t_{p0}^{x_{F_Z}} s_0^{y_{F_Z}-1} V_0^n k_{F_Z}, \quad \left( \frac{\partial F_Z}{\partial V} \right)_0 = 9,8 x_{F_Z} C_{F_Z} t_{p0}^{x_{F_Z}} s_0^{y_{F_Z}} V_0^{n-1} k_{F_Z}. \quad (75)$$

При аналізі роботи електроприводів подачі та шпинделю доцільно переписати ці виразу як функції кутових швидкостей обертання двигунів подачі на головного руху:

$$-\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F_Z}{\partial F_Z^{(i)}} \right)_0 \cdot \Delta F_Z^{(i)} + \Delta F_Z \approx \left( \frac{\partial F_Z}{\partial \omega_s} \right)_0 \cdot \Delta \omega_s + \left( \frac{\partial F_Z}{\partial \omega_v} \right)_0 \cdot \Delta \omega_v. \quad (76)$$

Вирази для часткових похідних переписуться у вигляді:

$$\left( \frac{\partial F_Z}{\partial \omega_s} \right)_0 = 9,8 y_{F_Z} C_{F_Z} t_{p0}^{x_{F_Z}} \omega_{s0}^{y_{F_Z}-1} \omega_{v0}^n k_{F_Z}, \quad \left( \frac{\partial F_Z}{\partial \omega_v} \right)_0 = 9,8 x_{F_Z} C_{F_Z} t_{p0}^{x_{F_Z}} \omega_{s0}^{y_{F_Z}} \omega_{v0}^{n-1} k_{F_Z}. \quad (77)$$

Значення часткових похідних від тангенціальної складової зусилля різання у сталому режимі роботи першого та другого порядку мають суттєве значення, в той час як похідними вищих порядків при підстановці числових значень, внаслідок їх вищого порядку малості, можна знехтувати. С метою спрощення процедури синтезу враховуватимемо тільки часткову похідну від тангенціальної складової зусилля різання за її першою похідною, тобто  $\left( \frac{\partial F_Z}{\partial \dot{F}_Z} \right)_0$

При використанні позначень  $\left( \frac{\partial F_Z}{\partial \omega_s} \right)_0 = K_s$ ,  $\left( \frac{\partial F_Z}{\partial \omega_v} \right)_0 = K_v$ ,  $-\left( \frac{\partial F_Z}{\partial \dot{F}_Z} \right)_0 = T_{pi3}$ ,

отримуємо лінеаризоване рівняння процесу різання у вигляді:

$$T_{pi3} \dot{F}_Z + F_Z \approx K_s \cdot \omega_s + K_v \cdot \omega_v. \quad (78)$$

Остаточо, диференційне рівняння, що описує динаміку процесу різання при формуванні зливної стружки, переписеться у вигляді:

$$\dot{F}_Z \approx -\frac{1}{T_{pi3}} F_Z + \frac{K_s}{T_{pi3}} \cdot \omega_s + \frac{K_v}{T_{pi3}} \cdot \omega_v. \quad (79)$$



Таким чином, математична модель процесу різання представляє собою диференційне рівняння, параметри якого залежать від режиму та параметрів різання та можуть мінятися для різних деталей, що обробляються. В той же час, слід враховувати, що системи стабілізації зусилля різання використовуються при крупних партій деталей, що виробляються, отже варіації цих параметрів лінеаризації можуть бути несуттєвими, але що повинні бути враховані.

Відповідно до вищеотриманої математичної моделі процесу різання, та урахуванням, що коефіцієнти  $K_S$ ,  $K_V$  можуть варіюватися, запишемо систему диференційних рівнянь, що відповідає структурній схеми на рисунку 7:

$$\begin{aligned} \dot{F}_Z &= -T_{\text{piz}}^{-1} F_Z + K_S T_{\text{piz}}^{-1} \cdot \omega_S + K_V T_{\text{piz}}^{-1} \cdot \omega; \\ \dot{\omega}_S &= \varepsilon_S; \\ \dot{\varepsilon}_S &= -0,125 T_{\mu S}^{-2} \omega_S + 0,5 T_{\mu S}^{-1} \varepsilon_S + K_{uS}^{-1} u_S; \\ \dot{\omega}_V &= \varepsilon_V; \\ \dot{\varepsilon}_V &= -0,125 T_{\mu V}^{-2} \omega_V + 0,5 T_{\mu V}^{-1} \varepsilon_V + K_{uV}^{-1} u_V. \end{aligned} \tag{80}$$

Далі запишемо функціонал якості, який повинен мінімізуватися при оптимальному або близькому до нього керуванні електроприводами металорізального верстату. Вибираємо мінімізований квадратичний функціонал виходячи з вимоги мінімізації динамічної похибки за змінними стану і мінімізації енергетичних витрат енергії на управління за кожним із приводів:

$$\min_u J = \int_0^{\infty} [\sum_{i=1}^5 q_i x_i^2 + r_1 u_S^2 + r_2 u_V^2] dt. \tag{81}$$

Таким чином, виникає наступна задача. Для заданої системи диференційних рівнянь, що описує збурений рух керованого об'єкту, і мінімізованого функціоналу якості, необхідно знайти вектор керування, при якому незбурений рух системи, що описується вищевказаною системою лінеаризованих диференційних рівнянь, є асимптотично стійким і вздовж траєкторії рух зображуючої точки, визначеною вищевказаною системою рівнянь, досягає мінімуму за вектором керування вибраний функціонал якості.

Для коефіцієнтів лінеаризації  $K_S$ ,  $K_V$  визначаємо мінімальне та максимальне значення, які вони можуть приймати при виконанні певного режиму обробки. Крім цього отримаємо певні значення  $K_{S \min}$ ,  $K_{V \min}$ ,  $K_{S \max}$ ,  $K_{V \max}$ . Для груп мінімальних та максимальних значень коефіцієнтів підсилення вирішуємо задачу пошуку оптимального керування. При цьому фактично задача зводиться до вирішення задачі аналітичного конструювання регулятора для області фазового простору «в малому» та «у великому».

Запишемо систему диференційних рівнянь, що описує взаємопов'язану систему електроприводів в матричній формі:

$$\dot{X} = AX + BU, \tag{82}$$



$$\text{де } A = \begin{bmatrix} -a_1 & a_2 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a_4 & -a_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -a_6 & -a_7 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}; U = [u_s \quad u_v].$$

Коефіцієнти підсилення  $b_1$  та  $b_2$  матриці керування  $B$  будуть змінюватися для різних областей фазового простору.

Вибір вагових констант функціоналу здійснюється відповідно формуванням обмежень на середньоквадратичну похибку фазових координат і керуючих впливів для кожного електроприводу верстата, при цьому значення вагових констант визначаються за виразами:

$$q_i = x_{i \max}^2, i = \overline{1,5}; r_1 = u_{S \max}^2; r_2 = u_{V \max}^2. \quad (83)$$

Далі виконуємо процедуру синтезу складеного регулятора для нелінійної системи у вигляді наступної послідовності етапів:

1. Здійснюємо вирішення задачі аналітичного конструювання для області «в малому» для лінеаризованої моделі і квадратичного функціоналу якості. При цьому вирішуємо рівняння Ріккати «в малому», тобто для області фазового простору, що відповідає невеликим відхиленням фазових координат від встановлених значень. Рівняння Рікати має вигляд  $A^T S + SA - SBR^{-1}B^T S + Q = 0$ , з якого знаходимо «в малому» матрицю коефіцієнтів зворотних зв'язків  $K_M = R^{-1}B^T S$  для випадку  $K_{S \min}$ ,  $K_{V \min}$ . Рівняння оптимального регулятора матиме вигляд:

$$u_{SM} = -\sum_{i=1}^5 k_{Si} x_i, u_{VM} = -\sum_{i=1}^5 k_{Vi} x_i. \quad (84)$$

2. Далі здійснюємо пошук рішення задачі аналітичного конструювання «у великому». Аналогічно вирішуємо рівняння Ріккати та знаходимо матрицю зворотних зв'язків  $K_B = R^{-1}B^T S$  для випадку  $K_{S \max}$ ,  $K_{V \max}$ . Рівняння оптимального регулятора матиме вигляд:

$$u_{SB} = -\sum_{i=1}^5 k'_{Si} x_i, u_{VB} = -\sum_{i=1}^5 k'_{Vi} x_i. \quad (85)$$

Далі здійснюємо зшивання миттєвих значень і отримання складеного нелінійного закону керування. Визначаємо нові допустимі керування і здійснюється зшивання «миттєвих значень» керуючих впливів  $u_{SM}$  і  $u_{SB}$  та  $u_{VM}$  і  $u_{VB}$ , відповідно, що є справедливими для різних областей фазового простору. При цьому рівняння регулятора для кожного з приводів «у великому» представляється у вигляді:  $u_{SB} = u_{SM} + \Delta u_S$ ,  $u_{VB} = u_{VM} + \Delta u_V$ , де:

$$\begin{aligned} \Delta u_S &= -\sum_{i=1}^5 (k'_{Si} - k_{Si}) x_i = -\sum_{i=1}^5 \Delta k_{Si} x_i; \\ \Delta u_V &= -\sum_{i=1}^5 (k'_{Vi} - k_{Vi}) x_i = -\sum_{i=1}^5 \Delta k_{Vi} x_i. \end{aligned} \quad (86)$$



Оскільки коефіцієнти регулятора  $k_{S1}, \dots, k_{S5}$  та  $k_{V1}, \dots, k_{V5}$  є функціями змінних стану, то керуючими впливами визначаємо варіації параметрів  $\Delta k_{S1}, \dots, \Delta k_{S5}, \Delta k_{V1}, \dots, \Delta k_{V5}$ . Тоді керування для кожного з приводів металорізального станка під час обробки деталі «у великому» приймає вигляд:

$$\begin{aligned} u_{SB} &= -\left(\sum_{i=1}^5 k_{Si} x_i + \sum_{i=1}^5 \Delta k_{Si} x_i\right); \\ u_{VB} &= -\left(\sum_{i=1}^5 k_{Vi} x_i + \sum_{i=1}^5 \Delta k_{Vi} x_i\right). \end{aligned} \tag{87}$$

Далі вибираємо мінімізований функціонал якості, що відмовідає обмеженню на динамічну похибку за змінними стану, мінімізацією енергетичних затрат на керування кожним електроприводом, а остання складова визначає ссобою «енергію» або узагальнену роботу оптимального керування:

$$\begin{aligned} \min_{\Delta k_{S1}, \dots, \Delta k_{S5}, \Delta k_{V1}, \dots, \Delta k_{V5}} J &= \int_0^{\infty} \left[ \sum_{i=1}^5 q_i x_i^2 + \sum_{i=1}^5 c_{Si} \Delta k_{Si}^2 + \right. \\ &+ \left. \sum_{i=1}^5 \frac{x_i^2}{4c_i} \left(b_1 \frac{\partial S_K}{\partial x_3}\right)^2 + \sum_{i=1}^5 c_{Vi} \Delta k_{Vi}^2 + \sum_{i=1}^5 \frac{x_i^2}{4c_{Vi}} \left(b_2 \frac{\partial S_K}{\partial x_5}\right)^2 \right] dt \end{aligned} \tag{88}$$

де  $c_{Si} = \Delta k_{Simax}^{-2}$ ,  $c_{Vi} = \Delta k_{Vimax}^{-2}$  - вагові коефіцієнти, що визначають обмеження на максимальні відхилення коефіцієнтів оптимального регулятора приводу подачі та приводу головного руху металорізального верстата під час руху зображуючої точки по фазовій площині;  $S_K$  - функція Белмана, що визначається варіаціями параметрів оптимального керування.

Здійснимо замикання вихідної системи, тобто підставляємо вираз для  $u_{SB}$ ,  $u_{VB}$ . у вихідну систему диференційних рівнянь, що описує поведінку об'єкта:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_4; \\ \dot{x}_2 &= x_3; \\ \dot{x}_3 &= -a_4 x_2 - a_5 x_3 - b_1 \left( \sum_{i=1}^5 k_{Si} x_i + \sum_{i=1}^5 \Delta k_{Si} x_i \right); \\ \dot{x}_4 &= x_5; \\ \dot{x}_5 &= -a_6 x_4 - a_7 x_5 - b_2 \left( \sum_{i=1}^5 k_{Vi} x_i + \sum_{i=1}^5 \Delta k_{Vi} x_i \right). \end{aligned} \tag{89}$$

Для системи рівнянь, що описують динаміку замкненого контуру стабілізації зусилля різання, рівняння Белмана має вигляд:



$$\begin{aligned} \min_{\Delta k_{Si}, \Delta k_{Vi}} J = & \int_0^{\infty} \left[ \sum_{i=1}^5 q_i x_i^2 + \sum_{i=1}^5 c_{Si} \Delta k_{Si}^2 + \sum_{i=1}^5 \frac{x_i^2}{4c_i} \left( b_1 \frac{\partial S_K}{\partial x_3} \right)^2 + \right. \\ & + \sum_{i=1}^5 c_{Vi} \Delta k_{Vi}^2 + \sum_{i=1}^5 \frac{x_i^2}{4c_{Vi}} \left( b_2 \frac{\partial S_K}{\partial x_5} \right)^2 + \frac{\partial S_K}{\partial x_1} (-a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_4) + \\ & \frac{\partial S_K}{\partial x_2} x_3 + \frac{\partial S_K}{\partial x_3} (-a_4 x_2 - a_5 x_3 - b_1 \left( \sum_{i=1}^5 k_{Si} x_i + \sum_{i=1}^5 \Delta k_{Si} x_i \right)) + \\ & \left. + \frac{\partial S_K}{\partial x_4} x_5 + \frac{\partial S_K}{\partial x_5} (-a_6 x_4 - a_7 x_5 - b_2 \left( \sum_{i=1}^5 k_{Vi} x_i + \sum_{i=1}^5 \Delta k_{Vi} x_i \right)) \right] = 0 \end{aligned} \quad (90)$$

Реалізуючи процедуру мінімізації, отримаємо:

$$\Delta k_{Si} = \frac{b_1}{2c_{Si}} \cdot \frac{\partial S_K}{\partial x_3} \cdot x_i, \Delta k_{Vi} = \frac{b_2}{2c_{Vi}} \cdot \frac{\partial S_K}{\partial x_5} \cdot x_i, i = \overline{1,5}. \quad (91)$$

Модифіковане рівняння Гамільтона-Якобі-Беллмана приймає вигляд:

$$\begin{aligned} q_i x_i^2 + \frac{\partial S_K}{\partial x_1} (-a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_4) + \frac{\partial S_K}{\partial x_2} x_3 + \frac{\partial S_K}{\partial x_3} (-a_4 x_2 - \\ - a_5 x_3 - b_1 \sum_{i=1}^5 k_{Si} x_i) + \frac{\partial S_K}{\partial x_4} x_5 + \frac{\partial S_K}{\partial x_5} (-a_6 x_4 - a_7 x_5 - b_2 \sum_{i=1}^5 k_{Vi} x_i) = 0 \end{aligned} \quad (92)$$

Рішення цього рівняння будемо шукаати у вигляді квадратичної форми від змінних стану:

$$S_k(x_1, \dots, x_5) = \sum_{ij=1}^5 k_{ij} x_i x_j. \quad (93)$$

Реалізуючи подальшу процедуру аналітичного конструювання регулятора, визначимо коефіцієнти квадратичної форми із системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Закон квазіоптимального нелінійного керування для кожного з електроприводів визначиться співвідношенням:

$$\begin{aligned} u_S = - \left( \sum_{i=1}^5 k_{Si} x_i + \sum_{i=1}^5 \frac{x_i^2}{2c_{Si}} b_1 \frac{\partial S_K}{\partial x_3} \right) = - \left( \sum_{i=1}^5 k_{Si} x_i + \sum_{i=1}^5 \frac{b_1 x_i^2}{c_{Si}} \sum_{j=1}^5 k_{j3} x_j \right); \\ u_V = - \left( \sum_{i=1}^5 k_{Vi} x_i + \sum_{i=1}^5 \frac{x_i^2}{2c_{Vi}} b_2 \frac{\partial S_K}{\partial x_5} \right) = - \left( \sum_{i=1}^5 k_{Vi} x_i + \sum_{i=1}^5 \frac{b_2 x_i^2}{c_{Vi}} \sum_{j=1}^5 k_{j5} x_j \right). \end{aligned} \quad (94)$$

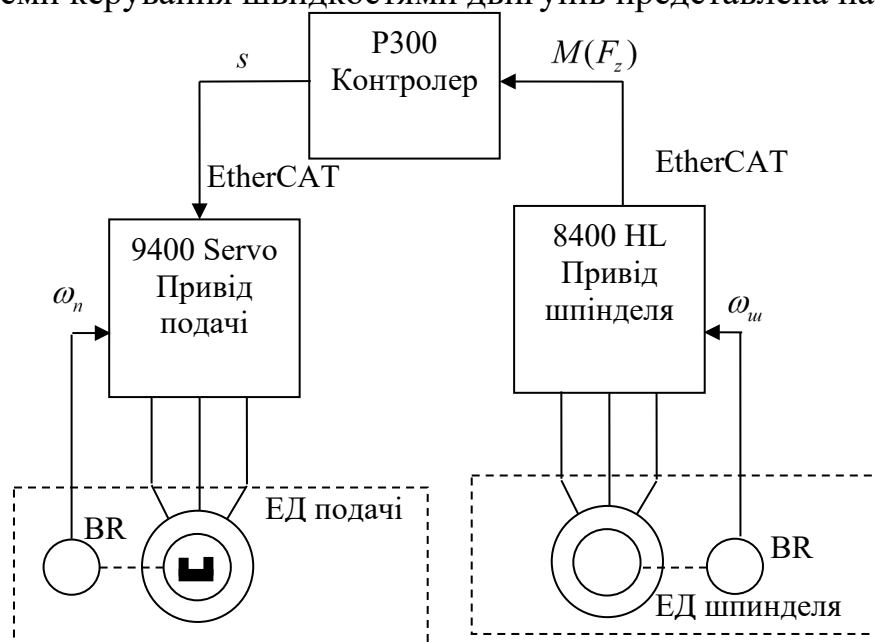
### 3.7. Фізична реалізація системи керування зусиллям різання.

Розглянемо приклад реалізації системи стабілізації тангенціальної складової зусилля різання для металообробного верстату чорнової обробки 1ВФ340М. При цьому розглянемо приклад реалізації системи керування на базі програмованого логічного контролера без використання додаткових датчиків



радіусу, потужності, температури тощо.

Електромеханічна система верстату складається із привода шпинделю із сервоасинхронним двигуном та привода подачі різця із синхронним двигуном з постійними магнітами. До кожного із цих електроприводів надаються високі вимоги до точності відпрацювання швидкості, а отже вони обладнані датчиками швидкості та положення високої роздільної здатності. Регулювання швидкості кожного з двигунів здійснюється від перетворювачів частоти виробництва компанії Lenze, формування завдання для яких здійснюється зовнішнім програмованим логічним контролером. Функціональна схема автоматизованою системи керування швидкостями двигунів представлена на рисунку 15.



**Рисунок 15 – Функціональна схема електромеханічної системи стабілізації зусилля різання.**

На рисунку 15 введено наступні позначення:

BR1, BR2 – фотоімпульсні датчики швидкості та положення;

$M(F_z)$  - сигнал за крутним моментом двигуна, що є пропорційний тангенціальній складовій зусилля різання;

$s$  - сигнал завдання по подачі;

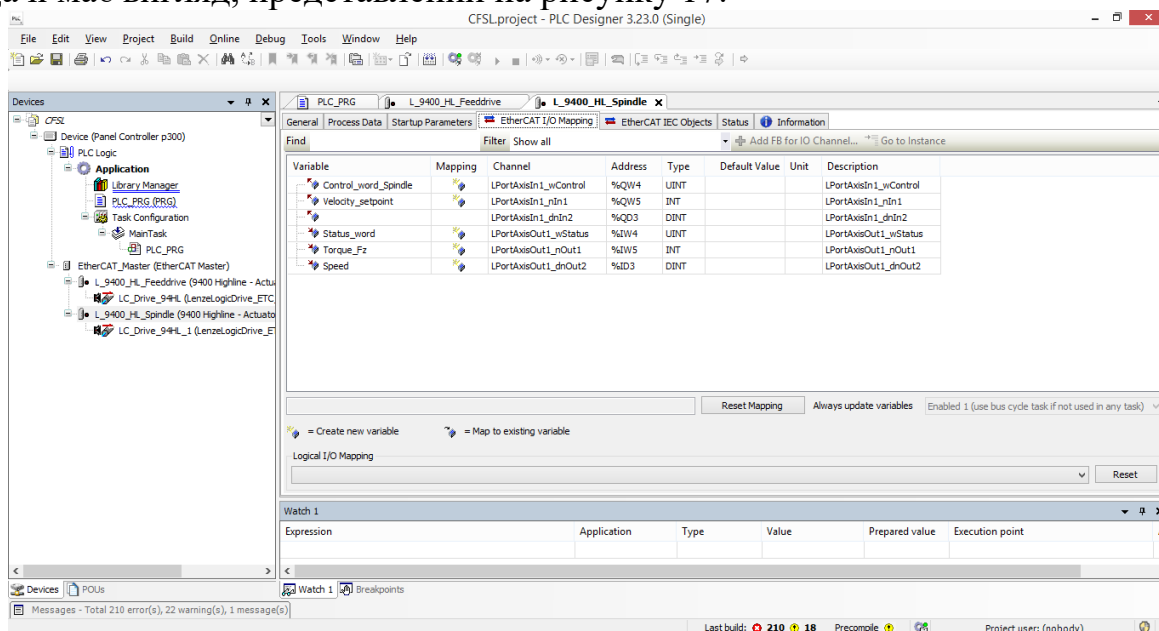
$\omega_n, \omega_u$  - поточне значення швидкості двигуна подачі та шпинделю відповідно.

На відміну від схеми керування, запропонованої в [Б8], передача даних здійснюється по інтерфейсу EtherCAT зі швидкістю 100МБ/с, на відміну від 500кБ/с, при реалізації з CANopen. Також формування каналів передачі даних, а також реалізація алгоритму оптимального керування здійснена на зовнішнього програмованому логічному контролері серії P300 від компанії Lenze. По інтерфейсу EtherCAT з приводу шпинделя передається сигнал за навантаженням, пропорційний тангенціальній складовій зусилля різання, а з приводу подачі – поточна швидкість та крутний момент двигуна подачі. При цьому на привод подачі подається сигнал зміни швидкості. Алгоритм керування контуром

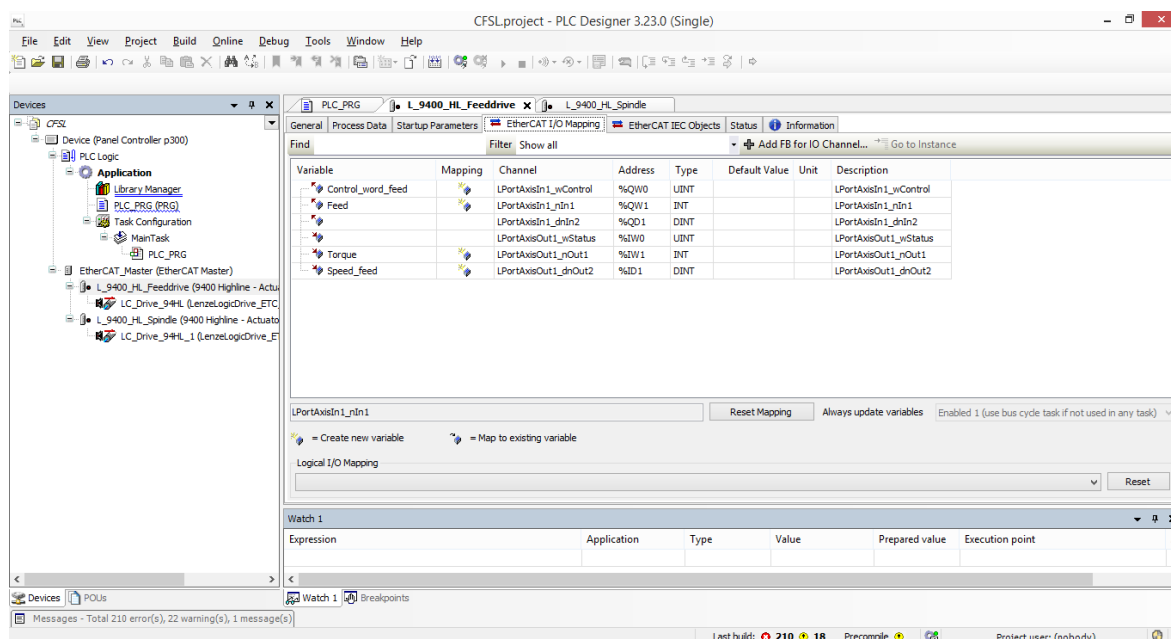




стабілізації зусилля різання реалізований для програмованого логічного контролера Lenze р300 в програмному забезпеченні PLC Designer v.3. Він потребує як формування налаштувань змінних, що передаються по мережі, так і самої програми керування. Вікно налаштування змінних, що передаються по EtherCAT на перетворювач шпинделю має вигляд, представлений на рисунку 16. Вікно налаштування змінних, що передаються по EtherCAT на перетворювач подачі має вигляд, представлений на рисунку 17.



**Рисунок 16 – Вікно налаштування змінних, що передаються з електроприводу головного руху металообробного верстата.**

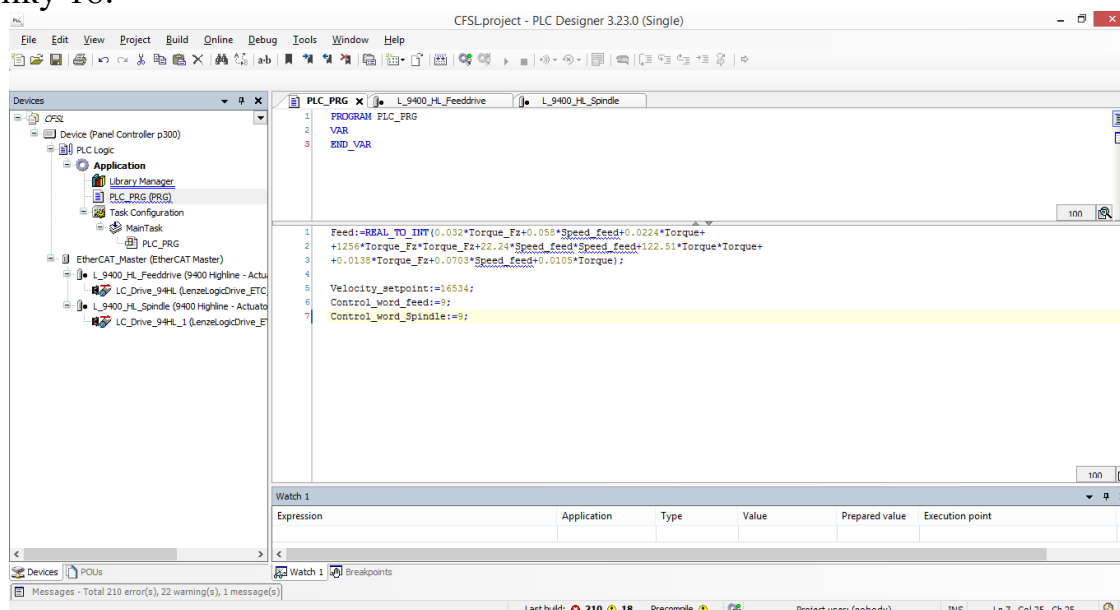


**Рисунок 17 – Вікно налаштування змінних, що передаються на електропривід подачі.**

Програма, що забезпечує стабілізацію тангенціальної складової зусилля різання, реалізована на мові програмування ST, має вигляд, представлений на



рисунку 18.



**Рисунок 18 – Вікно програмної реалізації оптимального алгоритму керування.**

На привод подачі завдання швидкості при цьому формується фактично із регулятора зусилля різання, а на привод подачі подається постійне завдання швидкості для забезпечення постійної лінійної швикості обробки  $V_{обр}$ . Керуючі слова для перетворювачів, що фактично активують режим відпрацювання завдання у швидкістному режимі та здійснюють команду пуску обладнання формують фіксовані команди роботи згідно інструкції з експлуатації [8].

## Висновки.

При обробці заготовок на металорізальних верстатах вплив коливань припуску, наявності нелінійних залежностей в контурі регулювання тощо, призводять до значних коливань зусилля різання, що в свою чергу веде до відхилення від робочих параметрів обробки. Використання оптимальних регуляторів, синтезованих методом динамічного програмування, дозволяють забезпечити високу якість перехідних процесів у випадку незначних коливань припуску та незначних відхилень параметрів різання від номінальних. У випадку «чорнової» обробки виникає необхідність синтезу нелінійних регуляторів або адаптивних, що перераховують параметри різання, й відповідно коректують закон керування. Використання програмованих логічних контролерів ускладнює використання адаптивних регуляторів, що забезпечують компенсацію нелінійностей за методом Пірсона, оскільки в них вкрай ускладнена процедура вирішення системи алгебраїчних рівнянь Ріккаті, а можна вирішувати арифметичну систему рівнянь Ріккаті, й тому ж невисокого порядку. У випадку врахування коливань припуску а також динамічних властивостей вузлів металообробного верстату доцільне використання методу синтезу нелінійних



регуляторів із застосуванням методу інваріантного «занурення» В.Ф. Кудіна. Такий алгоритм керування досить просто реалізується на основі програмованих логічних контролерів із використанням текстових мов програмування. Також такі нелінійні регулятори можуть бути застосовані для взаємопов'язаної системи електроприводів металорізальних верстатів, коли одночасно змінюється швидкість головного електроприводу шпинделю та приводів подачі. Реалізація систем стабілізації зусилля різання при цьому є досить простою, оскільки достатня точність вимірювання зусилля забезпечується при «чорновій» обробці шляхом вимірювання струму головного привода. Передача даних із головного приводу, обробка сигналу у прогармованому логічному контролері і подача команд керування на взаємопов'язану систему електроприводів може бути реалізована із використанням промислових мереж із функцією синхронізації, наприклад CANopen або EtherCAT.