



## KAPITEL 1 / CHAPTER 1<sup>1</sup> DEFORMATION-WAVE APPROACH IN THE THEORY OF FRICTION AND WEAR

DOI: 10.30890/2709-2313.2022-11-01-015

### Вступление.

Непрерывное повышение требований к надежности и долговечности современных машин и механизмов требуют совершенствования методик расчетов на трение и износ. Изменяющиеся в процессе взаимодействия узлов и деталей зазоры могут существенно отразиться на бесперебойной работе двигателей, энергетических машин, передаточных и исполнительных механизмов и т.д.

Несмотря на значительное количество теорий трения и изнашивания изложенных в обширных и многочисленных источниках, например [1, 2], вопросы волнообразования на контактирующих поверхностях и деформационно-волновой подход в вопросах трения и изнашивания пока не получили достаточного развития.

Поэтому в работе сделана попытка объяснить и дополнить механизм трения и изнашивания с позиции возникновения и трансформации деформационных волн на контактирующих поверхностях.

Долговечность и надежность машин и механизмов во многих случаях связаны с износостойкостью их узлов. Изменение зазоров в трущихся соединениях на десятые или сотые доли миллиметра часто приводят к нарушению работы точных механизмов. Не меньшее влияние оказывает износ на работоспособность тяжело нагруженных крупных машин.

### Обзор литературных источников.

Для оценки трения и степени изнашивания контактирующих деталей (линейной, прямоугольной, цилиндрической и других форм) принято рассматривать группы теорий [1, 2]: 1. геометрические; 2. молекулярные (адгезионные); 3. деформационные; 4. комбинированные.

Первая группа теорий объясняет трение как результат подъема по микронеровностям при взаимодействии двух шероховатых тел (Паран).

---

<sup>1</sup>*Authors: Dvoretzky Dmitry Nikolaevich, Malinovskiy Yuriy Alexandrovich, Minenko Roman Vadimovich  
Oliinyk Svitlana Yuryivna, Tsvirkun Sergij Leonidovich, Vlasenkov Dmitro Petrovich, Voytenko Nadezhda Viktorovna*



Вторая группа – это физические теории, которые объясняют трение как результат преодоления сил молекулярного взаимодействия между двумя твердыми телами (к этой группе относятся работы И. Дезагюлье, В. Гарди, Б.В. Дерягина, Г. Томлисона, Ф.Р. Боудена и Ф. Линга).

Третья группа объясняет трение за счет работы, затраченной на деформирование объема, связанного с взаимным внедрением выступов контактирующих тел. Развитие этих воззрений совпадает с развитием теорий упругости и пластичности.

Некоторые ученые этого направления считали, что трение это результат пластического оттеснения материала (Л. Гюмбель и др.).

Наиболее широкое применение нашла точка зрения, при которой трение обусловлено пластическим оттеснением материала и разрушением мостиков сварки – Ф.Р. Боуден и Д. Тэйбор. Аналогично теории Ф.Р. Боудена интерпретируется гипотеза Эрнста и Мерчента, где трение обусловлено адгезией и шероховатостью поверхности. Эта гипотеза пока не получила экспериментального подтверждения.

Вместе с тем, экспериментальные результаты, полученные Ф.Р. Боуденом и Д. Тейбором, позволили сделать вывод, что трение (сила и коэффициент трения) будут зависеть как от сил адгезии, так и от деформирования материала в тонком поверхностном слое в результате внедрения микронеровностей одного контактирующего тела в другое.

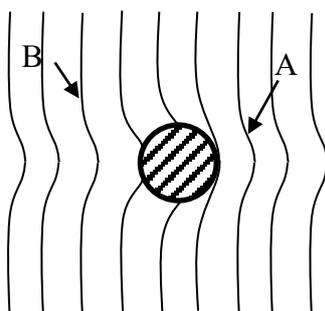
Независимо от принимаемой гипотезы при исследовании трения и изнашивания все эффекты, проявляющиеся в процессе контакта двух тел, рассматриваются как результат взаимодействия выступающих микронеровностей (под влиянием нормальной и сдвигающих сил). При этом жесткая микронеровность внедряется в более податливый материал полупространства. В результате такого взаимодействия микронеровность оставляет на гладкой поверхности полупространства царапину позади движущегося выступа. После оттеснения материал обтекает движущийся выступ, который затем восстанавливает первоначальную форму (в случае упругого взаимодействия, рисунок 1). При рассмотрении такой модели взаимодействия микронеровностей может произойти упругое оттеснение



материала, пластическое оттеснение, микрорезание, адгезионный отрыв, когезионный отрыв [1].

### Постановка задачи.

В случае рассмотрения классической задачи о трении и износе двух деталей обратимся к примеру взаимодействия упругого колеса, опирающегося на упругое основание. При нагружении колеса вертикальной нагрузкой образуется контакт трения, форма которого зависит от многих факторов. Вследствие выдавливания упругого материала в стороны, по краям контакта трения возникают зоны скольжения, а в середине – зона сцепления, рисунок 1.

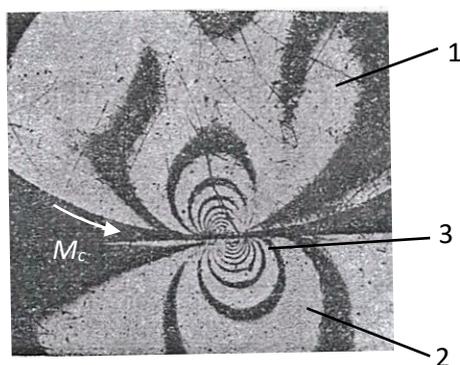


**Рисунок1 – Взаимодействие твердого индентора с упругим полупространством**

*A – зона сжатия, B – зона растяжения*

Если приложить к колесу вращающий момент  $M_c$ , то со стороны набегающего колеса на основание нагрузка возрастает, а со стороны сбегания нагрузка убывает. Поэтому вершина эпюры нормальных напряжений смещена к набегающему краю колеса и зона скольжения сокращается под набегающей частью колеса и развивается под сбегующей частью (рисунок 2). Это явление относится к передаче трением второго вида [3].

В тоже время, впереди набегающей части колеса образуется деформационный валик, к которому будет приложена сила трения при прокатывании колеса по полосе (состоит из силы трения сцепления  $T_{cc}$  и силы трения проскальзывания  $T_{cn}$ ). Сила трения стремится сжать поверхностные слои участка, расположенные впереди точки набегающего колеса на деформированный валик и вызвать местную потерю устойчивости поверхностных слоев.



**Рисунок 2 – Смещение кругов Буссинеска при набегании колеса на рельс на длине волны деформации  $l_2$**

*1 – колесо; 2 – рельс; 3 – зона деформации впереди набегающего колеса;  $M_c$  – вращающий момент.*

В рассмотренных теориях трения не учтены продольные деформации поверхностных слоев, а также их влияние на процессы трения и изнашивания.

О влиянии касательных напряжений (от силы трения) на поверхностные слои полосы (рельса) косвенно свидетельствует смещение вертикальных осей кругов Буссинеска под действием касательной силы трения (касательных напряжений) [3].

Поэтому для достоверного описания явлений между взаимодействующими деталями, с нашей точки зрения, необходимо рассмотреть зону на рельсе впереди точки контакта его с колесом.

Процессы, происходящие впереди точки контакта двух взаимодействующих деталей аналогичны, как при скольжении штампа по основанию, так и при прокатывании ролика по полосе.

Рассматривая эти детали, их можно уподобить двум взаимодействующим полупространствам (в ряде случаев в «малом»).

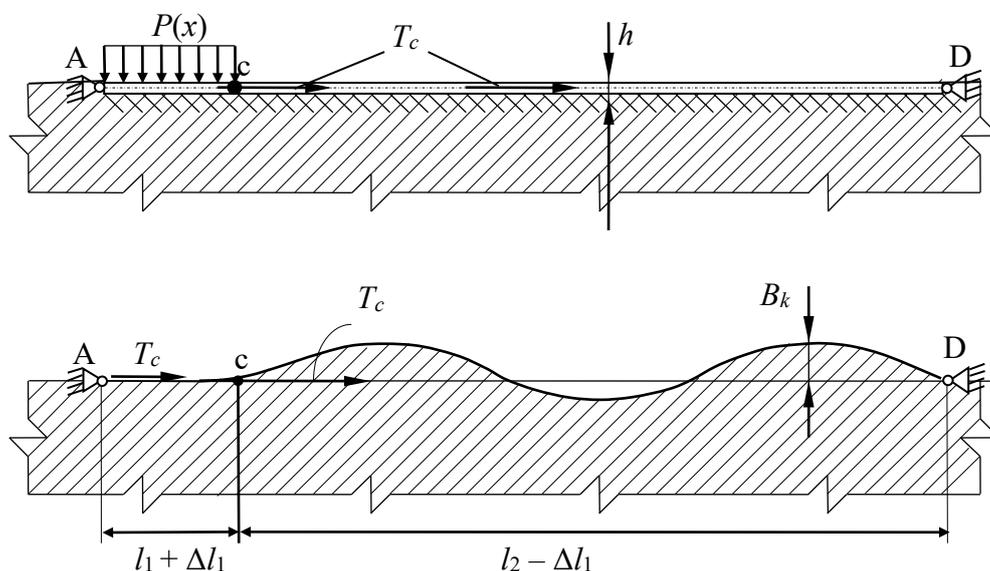
Причем такая задача контактного взаимодействия по сути состоит из трех задач: 1. Контактной задачи Герца [4]; 2. Задачи о растяжении площадки контактна (под действием плоского или очерченного по дуге окружности штампа); 3. Задачи о сжатии и продольной устойчивости поверхностных слоев впереди точки контакта двух взаимодействующих деталей.

На контактирующих поверхностях находятся тонкие упрочненные слои



определенной толщины. Эти слои упруго связаны с основным металлом. Под тонким упрочненным слоем, в большинстве случаев, понимают либо накатанную поверхность, либо покрытие в виде цементируемого, азотированного, борированного слоя или хромистого покрытия.

При рассмотрении процесса взаимодействия деталей, как правило, не учитывается влияние рабочих касательных усилий на деформационное состояние поверхностей в зоне, опережающей движущуюся деталь (штамп плоский или очерченный по дуге). Под действием касательных усилий эти поверхности попеременно нагружаются растягивающими, или сжимающими усилиями. В зависимости от величины действующих усилий и механических свойств материалов, из которых изготовлены эти детали, в случае сжимающих касательных нагрузок, на поверхностях контактирующих тел появляются деформационные волны сжатия [1] (см. рис. 1), которые могут быть как упругими, так и остаточными. То есть впереди движущегося штампа появляется деформированная поверхность, которая тут же выполаживается после прохождения штампа, и поэтому оказывается незамеченной.



**Рисунок 3 – Гипотетическая балка на упругом основании в подвижной системе координат**

*Принятые обозначения:*

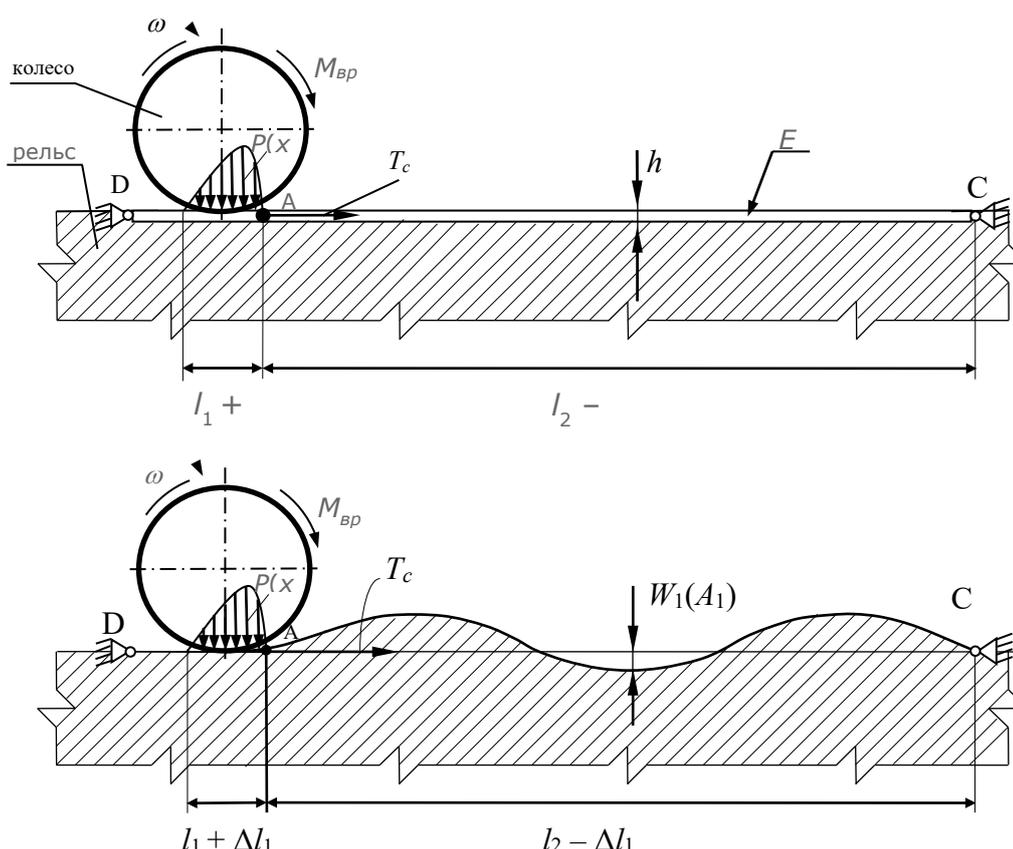
$h$  – толщина балки;  $B_k$  – амплитуда деформационных микронеровностей;

$l_1, l_2$  – длины участков балки;  $\Delta l_1$  – продольная деформация участка  $l_1$ ;

$P(x), T_c$  – действующие усилия.



Отметим, что так же, как и в задаче о движении плоского штампа по упругому или вязкоупругому основанию (рисунок 3), так и в задаче о качении ролика по полосе (плоскости) (рисунок 4), перемещению подвижной детали предшествует волна сжатия. То есть в обоих случаях, для трения скольжения и трения качения, процесс волнообразования может быть описан с одних позиций [5].



**Рисунок 4 – К деформированию поверхностных слоев рельса вперед набегающего колеса**

*E – поверхностный слой рельса в виде балки на упругом основании;  
h – толщина балки; D, A, C – условные опоры балки.*

### Изложение основного материала.

Как следует из условий постановки, данная задача является задачей нагружения упругого полупространства с тонким поверхностным слоем (тонким покрытием), через «штамп», касательными усилиями [6].

Толщина тонкого поверхностного слоя при нанесении покрытия



определяется толщиной покрытия и является величиной заданной. В случае поверхностного упрочнения деталей при их взаимодействии толщина уплотненного слоя может быть определена исходя из соотношения

$$h = \sqrt{P/\sigma_m}, \text{ мм} \quad (1)$$

где  $P$  – вертикальная нагрузка на пару;

$\sigma_m$  – предел текучести для рассматриваемой детали.

Дадим обоснование применимости расчетной модели тонких поверхностных слоев двух взаимодействующих деталей с ее внутренними слоями за счет использования вертикальных связей. При этом учтем, что поверхностные слои взаимодействующих деталей имеют более высокие механические характеристики по сравнению с внутренними слоями. И, кроме того, все основные процессы, происходящие на уровне взаимодействия микронеровностей, и проявление деформационно-волновых особенностей этого контакта протекают в поверхностных слоях. Поэтому предположим, что внутренние слои детали воздействуют на наружные посредством вертикальных упругих связей, то есть по аналогии с упругим Винклеровым основанием, которое моделируется упругой внутренней средой детали.

Сформулируем предпосылки для описания задачи по волнообразованию на поверхности полупространства при его взаимодействии с движущимся «штампом» (плоским в плане или катящимся цилиндром) (рисунки 3, 4).

Рассмотрим сопряженную задачу с движущимся штампом при наличии внешней нагрузки и трения, то есть задачу о передаче касательной нагрузки под «штампом» и перед «штампом» на полуплоскость. Условно рассмотрим балку, нагруженную вдоль оси продольной нагрузкой, и лежащей на упругом Винклеровом основании. Будем полагать, что балка свободно опирается на упругое основание. Под действием сжимающей касательной нагрузки происходит деформация поверхностных слоев полупространства, которая приводит к продольному изгибу полосы перед штампом, при этом возникают нормальные перемещения поверхностных слоев. Если деформации будут остаточными, то образовавшиеся волны приведут к появлению так называемых деформационных шероховатостей, которые в ряде случаев окажутся



соизмеримыми с начальными геометрическими неровностями (а в ряде случаев могут их произвести). Характер износа деформационных микронеровностей определяется тем, что при многократном прохождении одной детали по отношению к микронеровностям на другой детали, эти неровности будут возникать при каждом проходе «штампа» и многократно выполаживаться при каждом последующем его проходе, то есть деформационные микронеровности подвержены усталостному износу и усталостному разрушению. Кроме того, в результате взаимодействия двух контактирующих деталей в зоне их взаимодействия возникают участки трения с отрицательным демпфированием, где возможно самовозбуждение колебаний на площадке под «штампом». Одновременно с этим процессом происходит развитие параметрических колебаний в области перед штампом, причем пульсирующая сила трения в зоне контакта является «внешней» нагрузкой для процесса параметрических колебаний перед штампом.

Если в зоне под штампом возникают участки с изменяющейся силой трения как функции скорости проскальзывания, например при сухом трении в случае трения скольжения, или участков с проскальзыванием для трения качения, то возможно возникновение автоколебаний на участке под штампом. Эти колебания накладываются на касательное усилие, которое передается на деформационную волну, образовавшуюся впереди движущегося штампа.

Рассмотрим некоторые особенности взаимодействия между движущимся штампом и основанием. Если под штампом автоколебания не возникают, то касательное усилие  $T_c$  будет носить установившийся (постоянный) характер и оно будет соответствовать критической касательной нагрузке, которая воздействует на зону впереди штампа, вызывая «продольный» изгиб поверхностных слоев полупространства. Причем длина деформированного участка полупространства (или полосы) заранее неизвестна. Поэтому для решения поставленной задачи необходимо определить размеры площадки контакта двух деталей (под штампом), вычислить критическую касательную нагрузку по заданному вертикальному давлению на колесо, определить длину деформированного участка полуплоскости (или полупространства) и вычислить наибольшее значение деформационной микронеровности.



С целью оценки возможности возникновения усталостного разрушения элементов полупространства впереди движущегося штампа, дополнительно к найденным значениям параметров взаимодействия штампа и полупространства, необходимо также ввести в рассмотрение характеристику трения между указанными элементами как функцию скорости их взаимного проскальзывания.

Рассмотрим процесс контактного взаимодействия при движении жесткого штампа (как плоской, так и криволинейной формы) по основанию с внешним поверхностным покрытием.

Смоделируем механизм развития автоколебаний на площадке контакта. Для этого предположим, что автоколебательный процесс развивается в тонком поверхностном слое полупространства, который скреплен вертикальными упругими связями с его поверхностными слоями, но так как элементы площадки контакта находятся под влиянием переменной растягивающей нагрузки, то эти вертикальные связи не распространяем на контактное взаимодействие, а вносим в рассмотрение только горизонтальные упругие связи. При описании автоколебательного процесса необходимо найти постоянную и переменную части касательного усилия. Автоколебательный процесс на площадке контакта можно считать непрерывным. Так, если обратиться сначала к задаче о взаимодействии плоского штампа с полосой (или полупространством) при фиксированном положении площадки на штампе, которая контактирует с перемещающимся со скоростью  $V$  штампом на полупространстве. Если рассматривать взаимодействие вращающегося ролика с полупространством, то площадка контакта на ролике при непрерывном его вращении с угловой скоростью  $\omega$  перемещается по полосе с линейной скоростью точек обода колеса  $\omega r$  (где  $r$  – наружный радиус колеса) (рисунок 4). Во время перемещения штампа по полосе на эти детали (элементы) действуют касательная сила сцепления  $T_c$ , а также силы упругости  $T_y$  и инерции  $T_u$ .

Для математической постановки задачи будем исходить из представления о том, что абсолютное перемещение какой либо точки контакта на полосе  $x$  будет состоять из суммы переносного перемещения  $Vt$  и относительного движения площадки при колебаниях  $\xi$

$$x = Vt + \xi, \quad (2)$$



где  $\xi = x - Vt$  – относительное перемещение площадки контакта;

$V$  – линейная скорость перемещения штампа;

$t$  – время.

Составим уравнение баланса сил, приложенных к площадке контакта при взаимодействии движущегося штампа с полосой, которое будет иметь следующий вид

$$m\ddot{x} + cx = T_c(\dot{x} - V), \quad (3)$$

или для колебательного движения площадки контакта

$$m\ddot{\xi} + c(\xi + Vt) = T_c(\dot{\xi}). \quad (4)$$

В приведенных уравнениях:

$m = \gamma l_1 b h$  – масса участка контакта между штампом и полупространством;

$\gamma$  – плотность материала полупространства (полосы);

$l_1$  – длина площадки контакта штампа и полупространства;

$b$  – ширина участка контакта;

$h$  – толщина уплотненного слоя на площадке контакта (площадка контакта имеет или прямоугольную или эллиптическую форму при качении ролика, в случае приработки ролика эллипс вытягивается в прямоугольник с теми же границами);

$c = \frac{2bh}{\bar{k}l_1}$  – жесткость упругой (продольной) связи уплотненного слоя на участке

контакта:

$\bar{k} = \frac{4(1 - \mu^2)}{\pi E}$  – коэффициент упругой податливости поверхностного

(упрочненного) слоя полупространства:

$E$  – модуль упругости I рода (модуль Юнга) для полупространства (или его поверхностного слоя);

$\mu$  – коэффициент Пуассона для материала полупространства;

$T_c$  – сила сопротивления перекачиванию ролика [7]

$$T_c = \frac{f}{2\bar{k}} \left( \sqrt{8\bar{k}Pr} + \frac{\delta r}{f} \right);$$



$\delta = -\frac{\dot{\xi}}{V}$  – коэффициент относительного скольжения ролика по полосе согласно гипотезе Картера [8];

$P$  – вертикальная нагрузка на ролик;

$r$  – наружный радиус ролика;

$T_c' = fP$  – сила сопротивления при скольжении плоского штампа по полупространству (или полуплоскости).

Как известно [9], коэффициент трения  $f$  является некоторой функцией от скорости проскальзывания штампа по полупространству  $f = f(\dot{\xi})$

$$f(\dot{\xi}) = f_0 - \frac{3}{2} \Delta f \frac{\dot{\xi}}{\xi_{кр}} + \frac{\Delta f}{2} \left( \frac{\dot{\xi}}{\xi_{кр}} \right)^3, \quad (5)$$

где  $f_0$  – наибольшее значение коэффициента трения скольжения (трение покоя);

$\Delta f = (f_0 - f_{min})$  – приращение коэффициента трения

$f_{min} = f(\dot{\xi}_{кр})$  – значение коэффициента трения при критическом значении скорости проскальзывания (то есть  $\dot{\xi}_{кр}$  значение скорости проскальзывания при котором реализуется  $f_{min}$ ) т.е. минимум функции  $f(\dot{\xi})$ .

Обратимся к выражению (4), если предположить, что  $V=0$ , то это будет эквивалентно рассмотрению автоколебаний в подвижной системе координат, где начало системы координат перемещается вдоль горизонтальной оси, с линейной скоростью  $V$  движения штампа.

Тогда уравнение автоколебаний уплотненного слоя пятна контакта на штампе (или полосе) для общего случая запишем в виде

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = -\frac{T_c(\dot{\xi}, \xi^3)}{m} \quad (6)$$

Запишем выражение для силы сопротивления перемещению плоского штампа  $T_c$  по полосе, учитывая ее взаимосвязь с вертикальной нагрузкой и коэффициентом трения в виде зависимости от взаимной скорости проскальзывания контактирующих деталей [9]



$$T_c = \left( f_0 - \frac{3}{2} \frac{\Delta f}{\dot{\xi}_{кр}} \dot{\xi} + \frac{\Delta f}{2 \dot{\xi}_{кр}^3} \dot{\xi}^3 \right) P. \quad (7)$$

Тогда выражение (6) с учетом (7) запишем в форме

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = - \left( f_0 - \frac{3}{2} \frac{\Delta f}{\dot{\xi}_{кр}} \dot{\xi} + \frac{\Delta f}{2 \dot{\xi}_{кр}^3} \dot{\xi}^3 \right) \frac{P}{m}. \quad (8)$$

Введем обозначения:

$$\frac{3}{2} \frac{\Delta f}{\dot{\xi}_{кр}} \frac{P}{m} = \alpha; \quad \frac{\Delta f}{2 \dot{\xi}_{кр}^3} \frac{P}{m} = \beta; \quad \frac{c}{m} = \omega^2. \quad (9)$$

Решение (8) будем искать в форме

$$\xi = \xi_0 + \xi_1. \quad (10)$$

Если принять  $\xi_0$  в виде

$$\xi_0 = - \frac{f_0 P}{c}, \quad (11)$$

то мы получаем частное решение (8), тогда для определения  $\xi_1$  используем уравнение

$$\ddot{\xi}_1 + \omega^2 \xi_1 = \alpha \dot{\xi}_1 - \beta \dot{\xi}_1^3. \quad (12)$$

Рассмотрим уравнение (6) с учетом силы сопротивления перекачиванию ролика по полупространству с учетом вертикальной нагрузки  $P$ , и изменения коэффициента трения на площадке контакта  $f = f(\dot{\xi})$ , как функции скорости проскальзывания  $\dot{\xi}$ .

Сначала обратимся к правой части (6), которую по аналогии с источником [7], запишем следующим образом

$$\frac{T'_c}{m} = - \frac{\sqrt{kPr}}{\bar{k}} \frac{f_0}{m} + \left( \frac{3\sqrt{kPr}\Delta f}{2\bar{k}\dot{\xi}_{кр}} + \frac{r}{2\bar{k}V} \right) \dot{\xi} - \frac{\sqrt{kPr}\Delta f}{2\bar{k}\dot{\xi}_{кр}^3} \dot{\xi}^3. \quad (13)$$

Введем обозначения:

$$\alpha_1 = \frac{3}{2} \frac{\Delta f}{\dot{\xi}_{кр}} \frac{\sqrt{kPr}}{\bar{k}m} + \frac{r}{2\bar{k}mV}; \quad \beta_1 = - \frac{\sqrt{kPr}}{2\bar{k}m} \frac{\Delta f}{\dot{\xi}_{кр}^3}. \quad (14)$$

Тогда уравнение для определения смещений площадки контакта при ее колебаниях, по аналогии с (12) будет иметь вид



$$\ddot{\xi}_2 + \omega^2 \xi_2 = \alpha_1 \dot{\xi}_2 - \beta_1 \dot{\xi}_2^3 - \frac{\sqrt{kPr}}{\bar{k}} \frac{f_0}{m}. \quad (15)$$

Решение (15) ищем в виде суммы

$$\xi_2 = \xi_{20} + \xi_{01}. \quad (16)$$

Частное решение (16) ищем в виде

$$\xi_{01} = \frac{\sqrt{kPr}}{kc} f_0. \quad (17)$$

Для получения решения  $\xi_{20}$  рассмотрим частный случай уравнения (15)

$$\ddot{\xi}_{20} + \omega^2 \xi_{20} = \alpha_1 \dot{\xi}_{20} - \beta_1 \dot{\xi}_{20}^3, \quad (18)$$

где  $\omega$  – собственная частота колебаний поверхностного слоя полосы.

Сравнивая уравнения (12) и (18) заключаем, что они совпадают по форме, то есть дифференциальное уравнение колебаний поверхностного слоя полосы при взаимодействии с плоским штампом и штампом криволинейного (кругового) очертания совпадают по форме с точностью до постоянных коэффициентов. Поэтому для определения перемещений при автоколебаниях поверхностных слоев площадки контакта остановимся на дифференциальном уравнении (12), а решение (18) может быть легко получено на основании решения (12).

Следовательно, уравнение (18) как и (12) является дифференциальным уравнением второго порядка с нелинейным затуханием.

Для решения (12) используем метод медленно изменяющихся амплитуд (метод Ван дер Поля) [10].

Согласно методу, приближенное решение (12) может быть представлено в виде:

$$\xi_1 = A(t) \cos \omega t, \quad (19)$$

где  $A(t)$  – медленно изменяющаяся функция времени.

Справедливость представления решения в таком виде можно легко объяснить, если  $\alpha$  и  $\beta$  достаточно малы.

Условия медленности изменения  $A(t)$  можно записать

$$\frac{dA}{dt} \leq \omega A, \quad (20)$$



$$\frac{d^2 A}{dt^2} \leq \omega^2 A. \quad (21)$$

После подстановки (19) в (12) и выполнения преобразований, отбрасывая слагаемые с утроенной частотой  $3\omega$ , а также заведомо малозначащие слагаемые при выполнении условий (20), (21) [10], можно получить дифференциальное уравнение для амплитуды

$$2 \frac{dA}{dt} - \alpha A + \frac{3}{4} \beta \omega^2 A^3 = 0. \quad (22)$$

Уравнение (22) является уравнением с разделяющимися переменными.

Разделяя переменные получим

$$2 \int_a^A \frac{dA}{\left( \alpha - \frac{3}{4} \beta \omega^2 A^2 \right) A} = t. \quad (23)$$

В результате интегрирования получим зависимость амплитуды  $A(t)$  от времени

$$A(t) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\frac{3}{4} \beta \omega^2 - \left( \frac{3}{4} \beta \omega^2 - \frac{\alpha}{a^2} \right) e^{-at}}}, \quad (24)$$

где  $a$  – начальная амплитуда.

При  $t \rightarrow \infty$   $A(t) \rightarrow A_0$

$$A_0 = \frac{2}{\omega} \sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}}, \quad (25)$$

$A=A_0$  – амплитуда установившегося режима.

Таким образом, решение дифференциального уравнения (6) или (8) будет иметь вид

$$\xi(t) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\frac{3}{4} \beta \omega^2 - \left( \frac{3}{4} \beta \omega^2 - \frac{\alpha}{a^2} \right) e^{-at}}} \cos \omega t - \frac{f_0 P}{c}. \quad (26)$$

По аналогии с (8) запишем решение дифференциального уравнения (15)



$$\xi_2(t) = \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\sqrt{\frac{3}{4}\beta_1\omega^2 - \left(\frac{3}{4}\beta_1\omega^2 - \frac{\alpha_1}{a_1^2}\right)e^{-\alpha_1 t}}} \cos \omega t - \frac{\sqrt{kPr}}{\bar{k}} \frac{f_0}{m}. \quad (27)$$

Полученные выражения (26), (27) входят в формулы (7) и (13) для определения силы сопротивления перемещению штампа (7) – плоского, (13) – криволинейного. Непосредственная подстановка  $\xi(t)$  и  $\xi_2(t)$  в выражения (7) и (13) приводят к громоздким результатам.

С целью определения приблизительного значения касательного усилия  $T_c$  будем полагать, что масса  $m$  площадки контакта толщиной  $h$ , является малым параметром. Тогда обратимся непосредственно к уравнениям (8) и (15). Найденные величины  $\xi$ ,  $\xi_2$  будучи умноженными на жесткость продольной балки-полоски с точностью до бесконечно малых величин дают искомую касательную нагрузку (то есть, фактически используем метод «малого» параметра). Таким образом, выражения  $c\xi(t)$ ,  $c\xi_2(t)$  являются касательной нагрузкой, которая вызывает растяжения площадки контакта между штампом и полосой. Если следовать результатам работы [10], то эта нагрузка, помимо растяжения площадки контакта между «штампом» и полосой, также вызывает сжатие участка длиной  $l_2$  (которая пока неизвестна), расположенного впереди движущегося штампа.

Указанная нагрузка вызывает продольный изгиб, (а в ряде случаев) потерю продольной устойчивости поверхностных слоев, на деформации которых накладываются параметрические колебания (эти колебания часто бывают резонансными), поэтому нагрузка

$$T_c = c\xi(t) = T_1(t)\cos \omega t + T_0, \quad (28)$$

$$T_{c2} = c\xi_2(t) = T_2(t)\cos \omega t + T_{02} \quad (29)$$

называется параметрической.

Отметим, что принятая модель для описания автоколебаний площадки контакта является дискретной моделью в виде груза на пружине, под воздействием касательной силы  $T_c$ , направленной вдоль полосы. Эта сила, действуя на полосу впереди штампа, может способствовать возникновению двух составляющих деформационной волны – статической (квазистатической)



и динамической, которая накладывается на статическую в виде проявленных параметрических колебаний (квазигармонических колебаний, а в ряде случаев релаксационных).

Квазистатическая деформационная волна, происходящая с основной частотой собственных колебаний «тонкой» площадки контакта после наступления базового числа цикла нагружений приводит к усталостному разрушению поверхностных слоев, как на полосе, так и на штампе, а наложенные параметрические колебания могут вызвать дополнительные деформационные процессы на гребнях основных деформационных волн, которые приведут к возникновению возрастающих параметрических колебаний, а в ряде случаев, приводящих к появлению усталостных трещин и сколов.

Также следует указать, что при рассмотрении площадки контакта штампа с полосой может быть использована физическая модель распределенными параметрами. Этот подход приводит к усложнению задачи, которая, прежде всего, сводится к появлению спектра собственных частот колебаний. Обычно такой спектр сложно учесть для реальных взаимодействующих деталей.

Представленные выражения для  $T_c$  (28), (29) используем при составлении дифференциального уравнения параметрических колебаний «тонкого» поверхностного слоя полосы впереди движущегося штампа (или ролика) относительно подвижной системы координат, перемещающейся вдоль горизонтальной оси с началом системы отсчета « $O$ » с линейной скоростью перемещения штампа « $V$ ».

Составим дифференциальное уравнение колебаний условной балки, перемещающейся вместе с опорами балки-полоски конечной длины  $l_2$  (которая подлежит определению при решении задачи), нагруженной сжимающей переменной силой сопротивления перемещению «штампа»  $T_c = T_c(\dot{\xi}, \xi^3)$ , причем балка-полоска еще дополнительно опирается на упругое основание из внутренних слоев с коэффициентом отпора  $\bar{\beta}_1 = \frac{E\bar{\alpha}_1}{2}$  (рисунок 3).

Реактивное усилие от упругого основания внутренних слоев ролика пропорционально упругим (вертикальным) прогибам основания полосы.



В уравнение продольного изгиба вводим вертикальную распределенную нагрузку в виде отпора упругого основания, а также введем инерционную нагрузку.

Тогда уравнение, описывающее продольный изгиб балки-полоски длиной  $l_2$ , составленное из уплотненных поверхностных слоев будет иметь вид

$$E_n I \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + T_c(\dot{\xi}, \dot{\xi}^3) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{E \bar{\alpha}_1}{2} w + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (30)$$

С учетом граничных и начальных условий

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = 0; x = l_2, \quad (31)$$

$$w(x_0, 0) = w_0(x_0); \frac{\partial w(x_0, 0)}{\partial t} = 0. \quad (32)$$

Заметим, что величина  $l_2$  зависит от геометрии сечения балки-полоски, модулей упругости  $E_n, E$  и подлежит дальнейшему определению.

В приведенных выражениях (30), (31), (32):

$w(x, t)$  – поперечный прогиб балки-полоски под действием продольного усилия  $T_c(\dot{\xi}, \dot{\xi}^3)$ ;

$\bar{\alpha}_1 = \sqrt[3]{\frac{E}{4E_n I}}$  – число полуволин балки-полоски на участке балки длиной  $\pi$  [11];

$E_n, E$  – соответственно модули упругости наружных и внутренних слоев полосы;

$x_0$  – некоторое значение продольной координаты  $x$  из интервала  $0 \leq x_0 \leq l_2$ ;

$\xi(t), \dot{\xi}(t)$  – соответственно относительное смещение деталей пары при колебаниях и скорость этих колебаний;

$m_0$  – погонная масса балки-полоски толщиной  $h$ .

Предположим, что функция  $w(x, t)$  допускает представление вида

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^n B_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l_2}. \quad (33)$$

Тогда после подстановки (33) в уравнение (30) получим совокупность дифференциальных уравнений одной переменной « $t$ ».



$$m_0 \frac{d^2 B_k}{dt^2} + E_n I \frac{k^4 \pi^4}{l_2^4} B_k + T_c \left( \dot{\xi}, \dot{\xi}^3 \right) \frac{k^4 \pi^2}{l_2^2} B_k + \frac{E}{2} \bar{\alpha}_1 B_k = 0. \quad (34)$$

Так как уравнения (34) идентичны при любых « $k$ », то в их решениях достаточно ограничиться одним общим решением, поэтому индекс « $k$ » в дальнейшем может быть опущен (или просто принят равным единице). Рассмотрим также некоторые обозначения ( $\mu_k, \omega_k, \Omega_k$ ) выполним с ними преобразования применительно к (34) и в дальнейшем будем рассматривать индекс  $k=1$  для главной формы колебаний.

С учетом сказанного, преобразуем (34) к виду (с учетом (28), (29))

$$\frac{d^2 B_k}{dt^2} + \omega_k^2 \left( 1 - \frac{T_0 + T_1(t) \cos \omega_0 t}{T_k^*} \right) B_k = 0, \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (35)$$

где  $\omega_k^2 = \frac{1}{m_0} \left( \frac{k^4 \pi^4}{l_2^4} E_n I + \bar{\beta}_1 \right)$  – квадрат  $k$ -той собственной частоты колебаний

незагруженной балки-полоски ( $l_2 \times b \times h$ ), если  $k=1, 2, 3, \dots$ ;

$T_0$  – постоянная составляющая касательной силы;

$T_k^* = \frac{k^2 \pi^2 E_n I}{l_2^2} + \frac{\bar{\beta}_1 l_2^2}{k^2 \pi^2}$  – значение критической касательной силы для формы

потери устойчивости балки-полоски с индексом « $k$ »;

$T_1$  – половина амплитуды колебаний касательной силы (может быть переменной величиной, нами принята как медленно изменяющаяся функция).

Для дальнейших преобразований введем обозначения:

$\Omega_k$  – частота собственных колебаний балки-полоски, нагруженной постоянной составляющей касательной силы  $T_0$  для формы колебаний с индексом « $k$ » ( $k=1, 2, 3, \dots$ )

$$\Omega_k = \omega_k \sqrt{1 - \frac{T_0}{T_k^*}}; \quad (36)$$

$\mu_k$  – коэффициент возбуждения нагрузки, который для многих систем является «малым» параметром [10]

$$\mu_k = \frac{T_1}{2(T_k^* - T_0)}. \quad (37)$$

С учетом принятых обозначений уравнение (35) преобразуем к виду:



$$\frac{d^2 B_k}{dt^2} + \Omega_k^2 (1 - 2\mu_k \cos \omega_0 t) B_k = 0. \quad (38)$$

Принимая  $k=1$  будем иметь (если  $T_1 \approx \text{const}$ )

$$B_1'' + \Omega_1^2 (1 - 2\mu_1 \cos \omega_0 t) B_1 = 0. \quad (39)$$

Уравнение (39) является уравнением Матье, которое описывает прохождение наложенных параметрических колебаний на деформированный поверхностный слой полосы.

В случае, когда касательная сила изменяется по более общему закону, например (28) или (29), то  $T_c$  можно записать в виде:

$$T_c = T_0 + T_1 \Phi(t), \quad (40)$$

где  $\Phi(t)$  – периодическая функция с периодом  $\frac{2\pi}{\omega_0}$ , тогда вместо уравнения

(39) будем иметь:

$$B_1'' + \Omega^2 [1 - 2\mu_1 \Phi(t)] B_1. \quad (41)$$

Уравнение (41), в отличие от (39), более общего вида, которое называется уравнением Матье-Хилла.

Введем в рассмотрение вспомогательные функции:

$$Q^2(t) = \Omega^2 [1 - 2\mu_1 \cos \omega_0 t], \quad (42)$$

$$Q_1^2(t) = \Omega^2 [1 - 2\mu_1 \Phi_1(t)]. \quad (43)$$

Отметим, что в выражении для частоты собственных колебаний балки, составленной из уплотненных поверхностных слоев,  $\Omega^2$  входит множителем собственная частота незагруженной системы  $\omega_1^2 = \frac{1}{m_0} \left( \frac{\pi^4}{l_2^4} E_n I + \bar{\beta}_1 \right)$ , которая обратнопропорциональна погонной массе балки « $m_0$ »

$$m_0 = \mu_0^2, \quad (44)$$

Поэтому  $m_0$  можно трактовать как малый параметр.

В силу такого представления данная колебательная система является высокочастотной и  $\omega_0^2 \gg 1$ .

Кроме того, функции  $Q(t)$ ,  $Q_1(t)$  определены на сегменте  $t_1 \leq t \leq t_2$  и



трижды дифференцируемы в заданных пределах.

Тогда дифференциальное уравнение (41) перепишем в виде

$$B''(t) + Q^2(t)B = 0. \tag{45}$$

В выражении (45) вместо  $Q(t)$  можно рассматривать  $Q_1(t)$ .

При решении (45) представим искомую функцию  $B(t)$  в виде

$$B(t) = u_1(t)V_1(t), \tag{46}$$

где вспомогательная функция  $V_1(t)$  может быть представлена в виде

$$V_1(t) = \exp \left[ i \int_{t_1}^{t_2} Q(t) dt \right] \tag{47}$$

После подстановки  $V_1(t)$  в уравнение (45) и выполнения преобразований с учетом  $\mu_0 \rightarrow 0$  переходим к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными

$$u_1'(t) = -\frac{1}{2} \frac{Q'(t)}{Q(t)} u, \tag{48}$$

которое допускает частное решение

$$\bar{u}_1(t) = \frac{1}{\sqrt{Q(t)}}. \tag{49}$$

Таким образом,  $u_1(t)V_1(t)$  является асимптотически приближенным решением (45) согласно [11], тогда можно показать, что на сегменте  $[t_1, t_2]$  существует фундаментальная система решений уравнения (45)

$$\left\{ \begin{aligned} B_1(t) &= \left[ \frac{1}{\sqrt{Q(t)}} + \varepsilon_1(t, \mu_0) \right] \exp \left[ i \int_{t_1}^t Q(t) dt \right] \\ B_2(t) &= \left[ \frac{1}{\sqrt{Q(t)}} + \varepsilon_2(t, \mu_0) \right] \exp \left[ -i \int_{t_1}^t Q(t) dt \right] \end{aligned} \right\}, \tag{50}$$

ИЛИ



$$\left\{ \begin{array}{l} B_1(t) = \left[ \frac{1}{\sqrt{Q(t)} + \varepsilon_1(t, \mu_0)} \right] \left[ \cos \int_{t_1}^t Q(t) dt + i \sin \int_{t_1}^t Q(t) dt \right] \\ B_2(t) = \left[ \frac{1}{\sqrt{Q(t)} + \varepsilon_2(t, \mu_0)} \right] \left[ \cos \int_{t_1}^t Q(t) dt - i \sin \int_{t_1}^t Q(t) dt \right] \end{array} \right. \quad (51)$$

Выражения (50) или (51) представляют собой фундаментальную систему решений дифференциального уравнения (45).

Исходя из приведенных выражений (50), (51) можно определить значение комплексных амплитуд для  $B_1(t)$ ,  $B_2(t)$

$$B^* = \max \sqrt{\operatorname{Re} B_1^2 + I_m B_1^2} \quad (52)$$

$$B^* = \max \sqrt{\operatorname{Re} B_2^2 + I_m B_2^2} \quad (53)$$

В приведенных выражениях  $\varepsilon_1(t, \mu_0)$ ;  $\varepsilon_2(t, \mu_0)$  – пока неопределенные бесконечно малые функции параметров  $\mu_0$ ,  $t$ , которые при устремлении  $\mu_0 \rightarrow 0$  обеспечивают точное решение (45) в виде (50), (51), как функций  $B_1(t)$ ,  $B_2(t)$ .

Полученные решения (50), (51) являются фундаментальной системой решения уравнения (45). Вместе с тем, полученные решения не выражаются через элементарные функции, использование этих решений будет ограниченным.

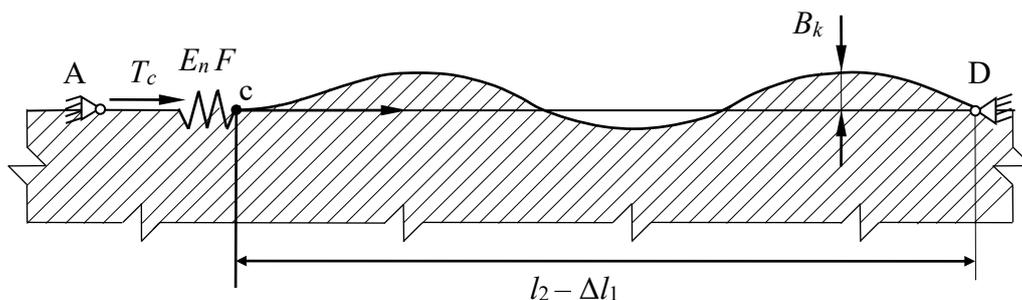
Представленная балка-полоска в области под штампом (при возникновении в этой зоне фрикционных колебаний) и впереди штампа, может быть уподоблена стержню с продольной связью в месте начала взаимодействия штампа с полосой. Эта упругая связь проявляется за счет растяжения участка контакта под штампом с жесткостью  $c_1 = E_n F$  (продольная жесткость) [10]. Будем полагать, что дополнительная продольная сила пропорциональна продольному смещению балки-полоски  $u$

$$\Delta T = c_1 u, \quad (54)$$

где  $c_1$  – продольная жесткость балки-полоски;

$E_n$  – модуль упругости поверхностных слоев;

$u$  – продольное смещение подвижного конца балки-полоски, рисунок 5, точка А.



**Рисунок 5 – Гипотетическая балка на упругом основании с учетом продольной жесткости  $E_n F$**

С учетом дополнительной продольной силы  $\Delta T$ , в выражении для тригонометрического ряда (33) изменится временная функция  $B_k(t)$ . Тогда дифференциальное уравнение (35) для определения функции  $B_k(t)$  примет вид:

$$B_k'' + \omega_k^2 \left( 1 - \frac{T_0 + T_1(t) \cos \omega_0 t + \Delta T}{T_k^*} \right) B_k = 0. \quad (55)$$

То есть дифференциальное уравнение (55) отличается от уравнения (33) наличием некоторого слагаемого (в частности нелинейного)  $\psi(B_k)$

$$B_k'' + \omega_k^2 \left( 1 - \frac{T_0 + T_1(t) \cos \omega_0 t}{T_k^*} \right) B_k + \psi(B_k) = 0 \quad (56)$$

или

$$B_k'' + \omega_k^2 (1 - 2\mu_0 \cos \omega_0 t) B_k + \psi(B_k) = 0. \quad (57)$$

Для учета смещения подвижной точки перед штампом в силу (54) обратимся к величине укорочения балки-полоски

$$u = l - \int_0^l \cos \varphi ds = l - \int_0^l \sqrt{1 - \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)^2} ds \approx \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 ds + \dots, \quad (58)$$

где  $\varphi$  – угол, который составляет касательная к изогнутой форме балки с продольной осью;

$w = w(s, t)$  – прогиб балки-полоски в некоторой произвольной ее точке по дуге  $s$  (можно рассматривать как бесконечный ряд)

$$w(s, t) = B_k(t) \sin \frac{k\pi s}{l};$$



$l$  – длина балки-полоски, подверженной деформации, в зоне опережающей штамп [13]

$$l = l_2 = 2,41\pi^3 \sqrt{\frac{4E_n I}{E}};$$

$\psi(B_k)$  – в общем случае некоторая нелинейная функция перемещения свободного конца балки-полоски, которую можно получить, если положить в выражении (56) для  $B_k = \text{const}$  и приравнять нулю время, тогда

$$\left(1 - \frac{T_0}{T_{кр}}\right) B_k + \frac{1}{\omega_k^2} \psi(B_k) = 0 \quad (59)$$

Окончательно выражение для  $\psi(B_k)$  при  $k=1$  можно записать в виде

$$\psi(B_1) = \frac{\pi^2 \omega_1^2 c_1}{4l_2 T_{кр}^*} B_1^3 = \gamma_1 B_1^3(t). \quad (60)$$

Если ввести обозначение

$$\gamma_1 = \frac{\pi^2 \omega_1^2}{4l_2 T_{кр}^*} c_1 = \frac{\pi^2 \omega_1^2}{4l_2 T_{кр}^*} E_n F, \quad (61)$$

то дифференциальное уравнение для определения  $B_1(t)$  примет вид:

$$B_1'' + \omega_1^2 (1 - 2\mu_0 \cos \omega_0 t) B_1 + \gamma_1 B_1^3 = 0 \quad (62)$$

Представленное уравнение (62) используем при определении амплитуды главной формы колебаний при действии параметрической нагрузки  $T_0 + T_1(t) \cos \omega_0 t$ . Ограничимся в решении первым приближением

$$B_1(t) = a_1 \sin \frac{\omega_0 t}{2} + b_1 \cos \frac{\omega_0 t}{2}. \quad (63)$$

Если подставить «ряд» (63) в уравнение (62), то получим

$$\left[ \Omega^2 (1 + \mu_0) - \frac{\omega_0^2}{4} \right] a_1 - \varepsilon \omega_0 b + \Phi_1(a_1, b_1) \quad (64)$$

$$\left[ \Omega^2 (1 - \mu_0) - \frac{\omega_0^2}{4} \right] b_1 + \varepsilon \omega_0 a + \Psi_1(a_1, b_1) \quad (65)$$

В результате подстановки с учетом обозначения амплитуды  $B^{*2} = a^2 + b^2$

$$\psi(B, B', B'') = \frac{B^{*2}}{4} (3\gamma_1 a - \varepsilon_L \omega_0 b) \sin \frac{\omega_0 t}{2} + \frac{B^{*2}}{4} (3\gamma_1 b + \varepsilon_L \omega_0 a) \cos \frac{\omega_0 t}{2}. \quad (66)$$



Тогда коэффициенты при функциях  $\sin \frac{\omega_0 t}{2}$ ;  $\cos \frac{\omega_0 t}{2}$  определяют коэффициенты разложения в ряд Фурье для  $k=1$

$$\Phi(a_1, b_1) = \frac{B^{*2}}{4} (3\gamma_1 a - \varepsilon_L \omega_0 b) \quad (67)$$

$$\psi(a_1, b_1) = \frac{B^{*2}}{4} (3\gamma_1 b + \varepsilon_L \omega_0 a) \quad (68)$$

В приведенных выражениях (66), (67), (68)  $\varepsilon_L$  – представляет собой коэффициент нелинейного затухания при колебаниях, который практически определить затруднительно.

Если представить уравнение (57) с учетом вида функции  $\psi(B_1)$ , то будем иметь

$$B_1'' + \omega_1^2 (1 - 2\mu_0 \cos \omega_0 t) B_1 + \gamma_1 B_1^3 = 0. \quad (69)$$

Дополнительно введем обозначения  $n = \frac{\omega_0}{2\Omega}$ ;  $\Delta = \frac{2\pi\varepsilon}{\Omega}$ ;  $\Delta_L = \frac{\pi\varepsilon_L}{2\Omega}$ . Тогда используя выражения (64), (65) с учетом (67), (68) и подразумевая под  $\varepsilon$ ;  $\varepsilon_L$  – соответственно линейные и нелинейные затухания в системе, можно для случая нелинейной упругости по уравнению (69) вычислять значения амплитуды колебаний согласно выражению:

$$B^* = \frac{2\Omega}{\sqrt{3\gamma_1}} \sqrt{n^2 - 1 \pm \sqrt{\mu_0^2 - \frac{n^2 \Delta^2}{\pi^2}}} \quad (70)$$

График, который можно построить по выражению (70) как функцию частоты, имеет две ветви – одна для  $n$  в пределах  $0,8 \leq n \leq 1,2$  является устойчивой кривой, если же  $n \geq 1,2$  то кривая амплитуд является неустойчивой.

Для нелинейной упругости характерным является наклон резонансных кривых в сторону больших возмущающих частот. По формуле (70) вычисляем амплитуды деформационных микронеровностей, которые могут быть сопоставимы с естественными микронеровностями деталей после их механической обработки резанием, давлением или шлифованием. Алгоритм вычисления амплитуд деформационных микронеровностей позволяет спрогнозировать возникновение микронеровностей, а также возможность их



разрушения при возникновении неустойчивых динамических состояний, которые продиктованы возбуждением фрикционных колебаний в области перед штампом.

Рассматривая вычисление амплитуд установившихся колебаний балки-полоски под действием параметрической нагрузки, важным является учет неустойчивой ветви кривой амплитуд как функции частоты возбуждения при  $n \geq 1, 2$ , следует иметь ввиду тот факт, что проявляющийся параметрический резонанс реализуется в виде накопившихся очагов шелушения или трещиноватости, которые накладываются на остаточные деформационные волны наружных поверхностей.

Обращаясь к формуле (70), делаем вывод о том, что для оценки влияния силовых и физических параметров формулу удобно преобразовать с учетом значений коэффициентов:  $\Omega, \gamma_1, n, \mu_0, \Delta, \Delta_L$

$$\begin{aligned}
 B^* &= \frac{2\sqrt{\frac{1}{m_0} \left( \frac{\pi^4}{l^4} E_n I + \beta_1 \right)} \sqrt{\frac{T_1^* - T_0}{T_1^*}}}{\sqrt{3} \sqrt{\frac{\pi^2}{4lT_1^*} \frac{1}{m_0} \left( \frac{\pi^4}{l^4} E_n I + \beta_1 \right)} E_n F} \sqrt{\frac{T_1}{4(T_1^* - T_0)} - 1 \pm \sqrt{\frac{T_1^2}{4(T_1^* - T_0)^2} - \frac{4\pi^2 \varepsilon^2}{\Omega^2}}} = \\
 &= \frac{2\sqrt{T_1^* - T_0} \sqrt[3]{\frac{4E_n I}{E}}}{\sqrt{0,3\pi} \sqrt{E_n F}} \sqrt{\frac{T_1}{4(T_1^* - T_0)} - 1 \pm \sqrt{\frac{T_1^2}{4(T_1^* - T_0)^2} - \frac{4\pi^2 \varepsilon^2}{\frac{1}{m_0} \left( \frac{\pi^4}{l^4} E_n I + \frac{E}{2} \right) \sqrt[3]{\frac{E}{4E_n I}}}}} \quad (71)
 \end{aligned}$$

Таким образом, амплитуда деформационной волны при связанных фрикционных и параметрических колебаниях (в условиях близких к параметрическому резонансу) пропорциональна корню квадратному из разности критического усилия  $T_1^*$ , постоянной составляющей критической нагрузки  $T_0$  и массовому коэффициенту  $\mu_0$ , а также физическим и геометрическим параметрам балки-полоски  $E_n, E, m_0, b, h, l (l_2)$ . Причем коэффициенты затухания можно трактовать как малые параметры ( $\varepsilon, \varepsilon_L$ ), которые характеризуют как внешнее так и внутреннее трение материала балки-полоски (или материала штампа). Однако при повышении рабочих температур в зоне контакта коэффициенты  $\varepsilon, \varepsilon_L$  могут существенно возрасти и тогда будет неправомерно считать коэффициенты затухания малыми параметрами.



Если абстрагироваться от самовозбуждающихся фрикционных автоколебаний и вызванных ими параметрическими колебаниями в зоне под штампом и перед штампом, то участок балки-полоски под штампом будет испытывать только растяжение, а участок перед штампом будет деформироваться по периодической кривой, близкой к синусоиде, которую можно трактовать как бегущую волну длиной  $l_2$ , перемещающуюся с линейной скоростью  $V_0$ .

После определения длины сжатого участка балки ( $l=l_2$ ), числа полувольт на сжатом участке, потерявшем продольную устойчивость  $k$  [13], возникает вопрос определения высоты деформационных неровностей. Как было установлено (рисунок 3), участок под штампом  $l_1$ , находится в зоне растяжения, а участок  $l_2$  – в зоне сжатия. Предположим, что балка-полоска задана в виде стержня с шарнирными опорами, в подвижной системе координат. Так как сплошность этих элементов поверхностных слоев не нарушается в большинстве практических случаев, то удлинение участка под штампом  $\Delta l_1$ , будет равно укорочению участка перед штампом  $\Delta l_2$  ( $\Delta l_1=\Delta l_2$ ). Предположим, что проекция сжатого участка балки-полоски  $l_2$  укоротилась на длине  $\Delta l_1$ . Следовательно длина проекции дуги  $l_2$  на горизонтальную ось будет равна  $l_2-\Delta l_1$ , при этом сам участок балки  $l_2$  изогнется по некоторой периодической кривой с амплитудой волны деформации  $\max B$ . Естественно предположить, что согласно принятого опирания концов балки эта кривая может быть представлена синусоидой

$$w_k(x) = \max B_k \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (72)$$

Заметим, что  $l=l_2$  – это длина волны деформации участка перед штампом:  $k=2,41$  (принимаяем  $k=2,5$ ) – количество полувольт деформации участка перед штампом.

Исходя из деформационных зависимостей для участка перед штампом запишем выражения для приращения  $\Delta l_1$

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \int_0^{l_2} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{dw}{dx} \right)^2} dx - dx \right) = \int_0^{l_2} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{dw}{dx} \right)^2} - 1 \right) dx \approx \frac{1}{2} \int_0^{l_2} \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 dx. \quad (73)$$

С учетом вида функции  $w(x)$  запишем



$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= \frac{1}{2} \int_0^{l_2} mB_k^2 \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \cos^2 \frac{k\pi x}{l} dx = mB_k^2 \frac{k^2 \pi^2}{2l^2} \int_0^{l_2} \cos^2 \frac{k\pi x}{l} dx = \\ &= mB_k^2 \frac{k^2 \pi^2}{2l_2^2} \left( \frac{l}{2} + \frac{l}{4k^2 \pi^2} \sin 2k\pi \right). \end{aligned} \quad (74)$$

Если  $k=2,5$  (точнее  $k=2,41$ ), то  $\sin 5\pi = 0$  и

$$\Delta l_1 = \frac{k^2 \pi^2}{4l_2} mB_k^2. \quad (75)$$

С другой стороны, согласно [13] для растянутого участка  $l_1$

$$\Delta l_1 = \frac{T_c l_1}{E_n h}. \quad (76)$$

Приравнявая (75) и (76) получим

$$mB_k^2 = \frac{2}{k\pi} \sqrt{\frac{T_c l_1 l_2}{E_n h}}. \quad (77)$$

Следовательно, высота наибольшей деформационной микронеровности прямопропорциональна среднему геометрическому значению длин участков  $l_1$ ,  $l_2$ , и прямопропорциональна корню квадратному из отношения касательного усилия  $T_c$  к толщине  $h$  для одного и того же материала балки-полоски.

Рассмотрим возможность разрушения поверхностных слоев взаимодействующих деталей под влиянием касательных и нормальных усилий ( $T_c$ ,  $G$ ). Для длительной эксплуатации этих деталей касательное усилие  $T_c$  не должно превышать критическую силу  $T_k^*$  верхнего слоя полупространства

$$T_c < T_k^* \quad (78)$$

Поэтому тонкий поверхностный слой взаимодействующих деталей получает упругие (обратимые) деформации, которые исчезают после прекращения действия нагрузок ( $T_c$ ,  $G$ ). Выход из строя тонкого поверхностного слоя наступает только в результате усталостного поверхностного разрушения наружных слоев полупространства (в основном хрупкого разрушения). При этом эквивалентное переменное напряжение  $\sigma_s$  не должно превышать предела выносливости материала детали  $\sigma_{-1}$

$$\sigma_s \leq \sigma_{-1}, \quad (79)$$

где  $\sigma_s = \sigma_a + \psi_{\sigma d} \sigma_m$  – эквивалентное переменное напряжение;



$\sigma_a$  – амплитудное значение переменной части напряжения цикла;

$\sigma_m$  – среднее значение напряжения цикла;

$\psi_{\sigma d}$  – коэффициент влияния постоянных напряжений для детали.

При выполнении условия (79) число циклов нагружения будет значительным (порядка  $10^8$  циклов нагружения и более).

Таким образом, для этого случая расчет на износ сводится к расчету на усталость упругих деформационных микронеровностей, у которых определяется длина упругой деформационной волны, амплитуда (высота) деформационной волны, период времени в течении которого развивается базовое число циклов нагружения поверхностных слоев. При этом, возникающие микронеровности, после прекращения воздействия силы  $T_c$  возвращается в исходное (недеформированное) состояние, как за счет проявления упругих свойств поверхностных слоев (в пределах закона Гука), так и за счет выполаживания оставшихся микронеровностей, в период прохождения по ним штампа.

Далее рассмотрим случай, когда действующие усилия ( $T_c, G$ ) таковы, что  $T_c \geq T_{кр}^*$  и тонкий поверхностный слой перед штампом теряет продольную устойчивость, и при этом получает неупругие деформации (то есть деформации поверхностных слоев становятся остаточными). После повторного прохождения штампа по деформационным выступам, их вершины могут быть частично или полностью срезаны – имеет место пластичное разрушение материала деталей.

При таком характере нагружения детали взаимодействующей пары получают интенсивный износ.

Обратимся к расчетному случаю, когда равнодействующее усилие  $T_c$ , при наличии качественной смазки, в комбинации с антифрикционными материалами таково, что деформации от действия продольного усилия  $T_c$  будут значительно менее ощутимы чем прогибы балки под действием веса штампа  $G$ . Эти деформации имеют вид бегущей волны по балке на упругом основании, которая при взаимодействии деталей носит циклический характер (волна) и в случае прохождения деталями базового числа циклов (например  $10^8$  и более)



происходит усталостное разрушение поверхностных слоев под воздействием веса штампа  $G$ .

Такой вид усталостных разрушений деталей возможен, однако он происходит при большем числе циклов нагружения, чем для первого случая (при  $T_c < T_{кр}^*$ ).

Рассмотренные результаты (для трех расчетных случаев) были получены без учета скорости взаимного перемещения деталей, иначе в квазистатической постановке, при этом фактически взаимное перемещение деталей может происходить при различных линейных скоростях, что существенно влияет на прогиб балки-полоски. В работе [13] были использованы результаты исследований В.Л. Бидермана, в которых прослеживается влияние скорости перемещения подвижной детали (штампа)  $V$  по балке-полоске на упругом основании, с коэффициентом отпора

$$\beta_1 = \frac{E\alpha_1}{2} = \frac{E}{2} \sqrt[3]{\frac{E}{4E_n}}. \quad (80)$$

Так как в представленных нами расчетных случаях имеет место бегущая волна (в неподвижной системе координат), то при расчете контактной выносливости поверхностных слоев балок на упругом основании необходимо учитывать коэффициент динамичности  $\delta_\delta$ , который по аналогии с работой [14] можно определить по формуле

$$\delta_\delta = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{m_0 V^2}{2\sqrt{\beta_1 E_n I}}}} = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{m_0 V^2}{2\sqrt{\frac{E_n EI}{2} \sqrt[3]{\frac{E}{4E_n}}}}}}. \quad (81)$$

Как следует из формулы (81), с увеличением скорости  $V$  коэффициент динамичности  $\delta_\delta$  возрастает и при достижении скоростью значения  $V=V_{кр}$  коэффициент  $\delta_\delta$  достигает бесконечно большого значения. При этом критическая скорость  $V_{кр}$  будет равна

$$V_{кр} = \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta_1 E_n I}}{m_0}}, \quad (82)$$

где  $m_0$  будем трактовать как погонную массу балки-полоски на упругом



основании.

Таким образом, на основании выполненных исследований приходим к заключению, что для сформулированной задачи заданные усилия (вес штампа  $G$ , сила сопротивления перемещению штампа  $T_c$ ), напряжения и деформации в гипотетической балке, высота деформационных микронеровностей, а также их усталостное разрушение связаны со скоростью взаимного перемещения деталей (или скоростью перемещения штампа  $V$ ).

## **Выводы**

1. В работе установлено, что при любом характере взаимодействия подвижных деталей наступает состояние прохождения перед штампом подвижной волны, которая приводит к разрушению деформационных и геометрических микронеровностей в зависимости от соотношения действующих вертикальной и касательной нагрузок для определенного количества циклов нагружения микронеровностей взаимодействующих деталей.

2. Выявлены расчетные случаи разрушения поверхностных слоев взаимодействующих деталей под влиянием касательных и нормальных усилий ( $T_c$ ,  $G$ ). Для обеспечения продолжительной эксплуатации этих деталей, касательные усилия  $T_c$  не должны превышать критическую силу  $T_{кр}^*$  для верхнего полупространства. При этом нарушение целостности поверхностных слоев наступает только в результате усталостного разрушения наружных слоев полупространства. В этом случае эквивалентное нормальное напряжение  $\sigma_3$  не должно превышать предела выносливости материала  $\sigma_{-1}$ , а также число циклов нагружения будет значительным, порядка  $10^8$  циклов и более.

3. Определен расчетный случай, когда действующие усилия таковы, что  $T_c \geq T_{кр}^*$ , и тонкий поверхностный слой перед штампом теряет продольную устойчивость, в результате чего получает остаточные неупругие деформации. При последующем прохождении штампа по деформационным выступам их вершины могут быть частично или полностью срезаны. В случае такого характера взаимодействия детали пары получают интенсивный износ и дальнейшее усталостное разрушение для значительно меньшего числа циклов



нагрузки элементов пары.

4. Установлен расчетный случай, когда действующее касательное усилие  $T_c \ll T_{кр}^*$  и продольные деформации от  $T_c$  будут значительно меньше ощутимы, чем поперечные прогибы балки под действием веса штампа  $G$ . Эти деформации имеют вид бегущей волны по балке на упругом основании и носят циклический характер. При достижении взаимодействующими деталями базового числа циклов ( $10^8$ ) и более наступает усталостное разрушение поверхностных слоев (деталей). Такой вид усталостного разрушения деталей возможен при наступлении большего числа циклов нагружения чем при  $T_c \ll T_{кр}^*$  (то есть для 1 случая, вывод 2).

5. В работе показано, что с увеличением скорости взаимодействия деталей существенно возрастают эквивалентные напряжения, которые можно откорректировать с использованием коэффициента динамичности.

Кроме того, в работе показано, что предлагаемая методика может быть рекомендована к применению, как при описывании трения скольжения, так и трения качения.