



**KAPITEL 1 / CHAPTER 1<sup>1</sup>**  
**DEFORMATION AND SHOCK WAVE REPRESENTATIONS ON THE**  
**NATURE OF FRICTION AND WEAR**

**DOI: 10.30890/2709-2313.2022-14-02-009**

При многовариантном изложении задач о взаимодействии поверхностных слоев деталей с касательными нагрузками будем исходить из того, что нагрузки прикладываются к микронеровностям внезапно и затем сохраняют постоянные значения в течение очень короткого промежутка времени. Поэтому вначале мы рассмотрим задачу о внезапном нагружении поверхностных слоев взаимодействующих деталей постоянной нагрузкой ( $T$ ) и особенностями приложения этих нагрузок к деформированной поверхности полосы впереди движущегося штампа [1]. Также рассмотрим процессы прохождения фронта продольных упругих волн по длине балки-полоски в рамках переходного процесса. После рассмотрения этих вопросов переходим к взаимодействию штампа и его микронеровностей с микронеровностями полосы. Поэтому учтем, что данный процесс является многократным, следовательно, полоса нагружается многократно повторяющимися импульсами в результате периодических соударений микронеровностей, иначе говоря, импульсной нагрузкой.

Кроме того, как следует из результатов, полученных академиком М.А. Лаврентьевым, данная задача является динамической [2], при этом авторами публикации учтены начальная неправильность полосы, коэффициент перегрузки по отношению к критической силе Эйлера, а также нами учтено количество полуволн деформации впереди движущегося штампа, реакция упругого основания и, кроме того, – циклическое (импульсное) приложение нагрузки [1].

Используя такой подход в данной задаче, отметим, что если преобладающими будут геометрические микронеровности, то имеет место не детерминированный процесс нагружения микронеровностей, а случайный.

При постановке и решении задач на трение и износ обычно рассматривают две сопряженные детали, которые взаимодействуют по полупространствам, в этом случае контакт деталей происходит по плоским скользящим поверхностям, на которых находятся тонкие покрытия или тонкие упрочненные слои

---

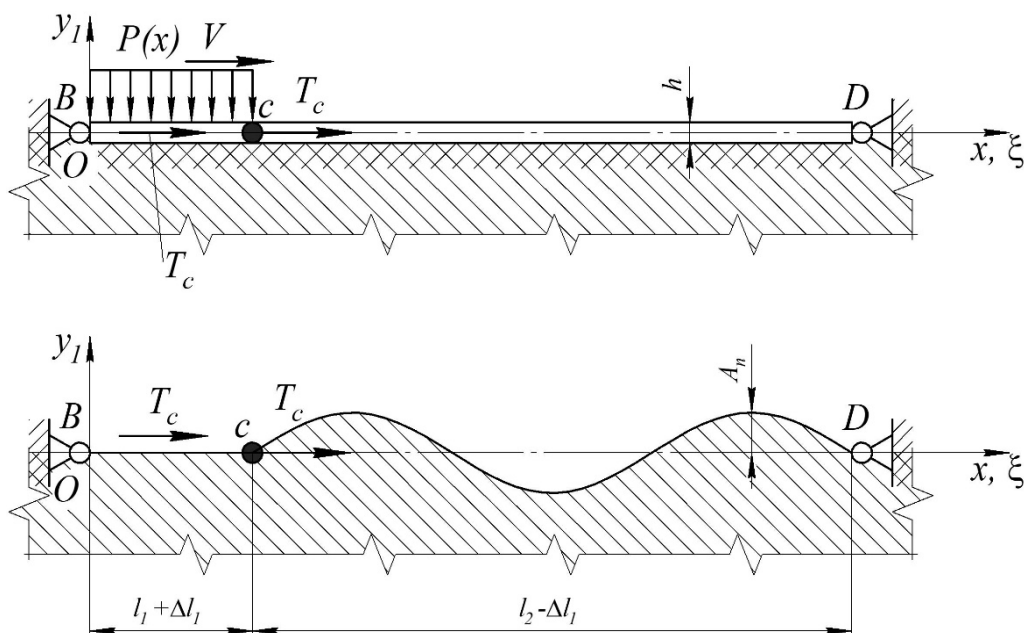
<sup>1</sup>*Authors: Malinovskiy Yuriy Alexandrovich, Tsvirkun Sergij Leonidovich, Minenko Roman Vadimovich  
Vlasenkov Dmitro Petrovich, Kolchak M.M., Dvoretzky Dmitry Nikolaevich, Oliinyk Svitlana Yuryivna*



определенной толщины. К каждой детали на ее рабочей поверхности приложены нормальные усилия, которые приводят к образованию пятен контакта на шероховатых поверхностях и местному внедрению микронеровностей, а касательные усилия, действующие по отношению к отдельным микронеровностям, приводят к отеснению материала (упругому пластическому, микрорезанию и др.). При таком рассмотрении процесса взаимодействия деталей не учитывается влияние рабочих касательных усилий на деформированное состояние соприкасающихся плоскостей (поверхностей) в области, опережающей движущуюся деталь (штамп). В зависимости от величин действующих усилий и механических свойств материалов, при сжимающих касательных нагрузках на поверхностях контактирующих тел происходит депланация плоских сечений, в результате проявления деформации «стесненный» сдвиг, который реализуется в деформационной волне сжатия, по длине балки, где эти процессы затухают.

В данной задаче обращаемся к взаимодействию двух деталей, при этом подвижная деталь перемещается по детали с тонким поверхностным упрочненным слоем, лежащем на упругой «постели» основного массива детали.

Рассмотрим деталь (штамп), движущуюся по балке-полоске на упругом основании, совместно с деформационной волной, опережающей штамп (рис. 1). Поэтому обратимся к деформационной волне, возникающей перед движущимся штампом.



**Рисунок 1 - Гипотетическая балка на упругом основании в неподвижной и подвижной системах координат  $xOy_1$ ,  $\xi Oy_1$**



Принятые обозначения:

$h$  – толщина балки;

$A_n$  – амплитуда деформационных микронеровностей;

$l_1, l_2$  – длины участков балки;

$\Delta l_1$  – продольная деформация участка  $l_1$ ;

$T, T_0, T_c$  – действующие усилия,  $T_c = T_c(V)$ ;

$Oxy_1; O\xi y_1$  – соответственно неподвижная и подвижная системы координат;

$V$  – скорость перемещения штампа;

$P(x)$  – распределенная нагрузка от штампа.

Выделим зону балки на упругом основании под движущимся штампом, а также зону опережающую штамп. Зона впереди движущегося штампа представляет собой участок балки на упругом основании, деформированный «касательным» усилием  $T = fP$ . Усилие  $P$  является весом штампа, а  $f$  – коэффициент трения скольжения между штампом и полосой.

Первоначально рассмотрим перемещение штампа по полосе в неподвижной системе координат  $yOx$ . Обозначим вертикальный прогиб балки-полоски  $y = y(x, t)$ ; где  $x = x(t)$  – продольное перемещение штампа.

Продольный изгиб балки с движущейся касательной силой  $T$  ( $T = fP$ ) опишем, по аналогии с задачей о «бегущей» изгибной волне [1], дифференциальным уравнением вида:

$$E_c I \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \beta y + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где  $y = y(x, t)$  – функция двух переменных. Тогда (1) является уравнением в частных производных. Для решения уравнения (1) используем подстановку В.Л. Бидермана [2]

$$y(x, t) = z(x - Vt) = z(\xi), \quad (2)$$

где  $\xi = x - Vt$  – продольная координата груза (штампа) в подвижной системе координат (связанной со штампом).

Выявим взаимосвязь производных

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = z^{IV}(\xi); \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = z''(\xi); \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = V^2 z''(\xi). \quad (3)$$

Тогда уравнение (1) после подстановки (2) и (3) запишем для подвижной системы координат (рис. 1) в виде

$$E_c I z^{IV}(\xi) + (T_c + mV^2) z''(\xi) + \beta z(\xi) = 0, \quad (4)$$

После замены переменной выполним переход от уравнения (1) в частных



производных к уравнению (4) в обыкновенных производных.

В приведенных выражениях (1), (4):

$E_c$  – модуль упругости I рода для поверхностных слоев балки на упругом основании;  $I$  – осевой момент инерции поперечного сечения балки на упругом основании;  $\beta$  – коэффициент упругой отдачи основания (коэффициент «постели»);  $m$  – погонная масса балки на упругом основании.

Запишем (4) в виде

$$z^{IV}(\xi) + \alpha^2 z''(\xi) + rz(\xi) = 0, \quad (5)$$

где:  $\alpha^2 = \frac{fP+mV^2}{E_c I}$ ;  $r = \frac{\beta}{E_c I}$  – коэффициенты уравнения (5).

Характеристическое уравнение дифференциального уравнения (5) примет вид:

$$S^4 + \alpha^2 S + r = 0, \quad (6)$$

$$n_{1,2}^* = \sqrt{\frac{\alpha^2}{2} \mp \sqrt{\frac{\alpha^4}{4} - r}}, \quad (7)$$

или

$$n_{1,2}^{*2} = -\frac{\alpha^2}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^4}{4} - r}, \quad (7)$$

принимая  $n^* = iS$ ,  $i = \sqrt{-1}$ , тогда

$$S_{1,2}^2 = \frac{\alpha^2}{2} \mp \sqrt{\frac{\alpha^4}{4} - r}. \quad (8)$$

В соответствии с выражением (8) общее решение (5) запишем в виде

$$z(\xi) = C_1 \sin S\xi + C_2 \cos S\xi + C_3 \xi + C_4. \quad (9)$$

Решение (9) дифференциального уравнения (5) должно удовлетворять четырем граничным условиям задачи

$$\begin{aligned} z = 0; z'' = 0 \text{ при } \xi = 0 \\ z = 0; z'' = 0 \text{ при } \xi = l_2 \end{aligned} \quad (10)$$

и записано для перемещения штампа в подвижной системе координат.

Из граничных условий следует, что  $C_2 = C_3 = C_4 = 0$ .

Если  $C_1 = 0$  то у нас было бы недеформированное равновесное состояние балки на упругом основании. Но так как балка испытывает продольный изгиб, то  $C_1 \neq 0$ , а следовательно  $\sin S_1 l_2 = 0$ , то есть  $S_1 = \frac{\pi}{l_2}$ , тогда балка изгибается по форме с  $n$  волнами синусоиды

$$z(\xi) = A_n \sin \frac{n\pi}{l_2} \xi, \quad (11)$$

где  $l_2$  – длина деформированного участка балки-полоски в зоне перед



движущимся штампом [1].

Тогда

$$S_1 = \frac{\pi}{l_2} = \sqrt{\frac{\alpha^2}{2} \mp \sqrt{\frac{\alpha^4}{4} - r}}, \quad (12)$$

$$S_{1,2}^2 = \frac{\pi^2}{l_2^2} = \frac{\alpha^2}{2} \mp \sqrt{\frac{\alpha^4}{4} - r},$$

$$S_2^2 - S_1^2 = 2 \cdot \sqrt{\frac{\alpha^4}{4} - r}; \quad \frac{\pi^2}{l_2^2} = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{fP+mV^2}{4 \cdot E_c I}\right)^2 - \frac{\beta}{E_c I}}. \quad (13)$$

Подставляя решение (9), записанное в форме (11), в исходное уравнение (4), тогда получим выражение для определения усилия

$$T^* = T_c + mV^2, \quad (14)$$

которое будем считать динамическим продольным усилием. Тогда вместо (4) будем иметь

$$E_c I \frac{n^4 \pi^4}{l_2^4} A_n - (T_c + mV^2) \frac{n^2 \pi^2}{l_2^2} A_n + \beta A_n = 0. \quad (15)$$

Сократим все слагаемые (15) на амплитуду волны деформации. Тогда уравнение (15), разрешенное относительно динамического продольного усилия  $T^*$  примет вид (14), а критическое значение динамического усилия запишем в виде:

$$T_{кр}^D = (T_{кр}^Э + mV^2) = \left(\frac{n\pi}{l_2}\right)^2 E_c I + \left(\frac{l_2}{n\pi}\right)^2 \beta = 0. \quad (16)$$

Запишем выражение критической силы балки-полоски с учетом скорости движения штампа, то есть аналог формулы Эйлера с учетом упругой податливости основания (коэффициент  $\beta$ )

$$T_{кр}^Э = \frac{n^2 \pi^2}{l_2^2} E_c I + \frac{l_2^2}{n^2 \pi^2} \beta - mV^2. \quad (17)$$

Если учитывать податливость основания  $\beta = \frac{E}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{E}{4E_c I}}$ , согласно источнику [1], то динамическое продольное усилие, его критическое значение получим

$$T_{кр}^{D*} = \frac{n^2 \pi^2}{l_2^2} E_c I + \frac{l_2^2}{n^2 \pi^2} \cdot \frac{E}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{E}{4E_c I}}. \quad (18)$$

Критическое состояние поверхностных слоев полосы наступит, если

$$T_{кр}^D > T_{кр}^Э = \frac{n^2 \pi^2}{l_2^2} E_c I + \frac{l_2^2}{n^2 \pi^2} \beta - mV^2. \quad (19)$$

Выполняется (19) при меньших значениях критической силы по Эйлеру. Поэтому, при расчетах, зная скоростной режим эксплуатации фрикционной пары, необходимо исходить из наличия запаса устойчивости поверхностных слоев:



$$k_y = \frac{T_{кр}^D}{T_{кр}^Э}. \quad (20)$$

При отсутствии запаса устойчивости поверхностных слоев возможно внезапное разрушение этого слоя, в силу потери им запаса устойчивости и последующего хрупкого разрушения, происходит скол деформационного образования. Если имеет место потеря устойчивости наружного слоя в результате пластической деформации, то образовавшаяся деформационная волна будет срезана или сглажена штампом. Запас устойчивости поверхностных слоев полосы должен обеспечить гарантированное выполнение условия (19) при котором сохранится выполнение этого неравенства. В данном случае минимальный запас устойчивости поверхностных слоев составит  $k_y \approx 2$ .

В задаче о бегущей деформационной волне, перемещающейся под действием касательного усилия  $T_c$  на длине  $l_2$ , рассмотрим усилие  $T_c$ , приложенное впереди штампа (на длине  $l_2$ )

$$T_c = fP + mV^2. \quad (21)$$

Если  $V=0$ , то  $T_c = fP$ .

Степень динамичности касательной нагрузки можно оценить, из отношения динамического усилия  $T_d$  к его статическому аналогу  $T_c$

$$\frac{T_d}{T_c} = \frac{fP+mV^2}{fP} = 1 + \frac{mV^2}{fP}. \quad (22)$$

Обратимся к выражению для определения высоты наибольшей деформационной микронеровности. Предварительно будем полагать, что штамп находится в состоянии покоя ( $V=0$ ). Тогда формула для расчета высоты деформационной микронеровности определена из выражения амплитуд деформационной волны в виде [1]:

$$A_o = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{fPl_1l_2}{E_c h}}, \quad (23)$$

где  $l_1, l_2$  – соответственно длины деформационных участков под и перед штампом;

$E_c$  – модуль упругости поверхностных (уплотненных) слоев полосы;

$h$  – толщина уплотненных слоев полосы.

Если же штамп перемещается по балке-полоске с линейной скоростью  $V$ , то величина деформационной микронеровности будет определена исходя из (23) с учетом (21), по формуле



$$A_V = \frac{2}{n\pi} \sqrt{\frac{(fP+mV^2)l_1l_2}{E_c h}}. \quad (24)$$

Тогда отношение (24) к (23) можно трактовать как коэффициент динамичности при перемещении «штампа»

$$\delta_d = \sqrt{1 + \frac{mV^2}{fP}}. \quad (25)$$

Поэтому, зная величину погонной массы балки-полоски  $m$ , вес груза  $P$ , его скорость  $V$  и коэффициент трения  $f$  вычисляем коэффициент динамичности  $\delta_d$ .

Использование формул (23), (24), (25) позволяет вычислить амплитуду деформационной микронеровности для заданной скорости движения штампа.

В процессе движения штампа по полосе может быть применено понятие критической скорости движения штампа.

Под критической скоростью движения штампа будем понимать такую скорость его движения  $V_{кр}$ , при которой реализуется потеря продольной устойчивости балки-полоски, и кроме того деформация балки становится бесконечно большой.

Для определения  $V_{кр}$  обратимся к выражению (17), которое запишем в виде

$$mV^2 = \frac{n^2\pi^2 E_c l}{l_2^2} + \frac{l_2^2 r}{n^2\pi^2} - fP, \quad (26)$$

где  $fP = T$  – произвольное значение касательного усилия.

Откуда

$$V_{кр} = \frac{\sqrt{m}}{m} \sqrt{\frac{n^2\pi^2 E_c l}{l_2^2} + \frac{l_2^2 r}{n^2\pi^2} - fP}, \quad (27)$$

Рассматривая выражение (26) и (27) балки-полоски в критическом и докритическом состояниях видно, что действующее касательное усилие  $T$  ( $T = fP$ ) меньше или равно критической силе по Эйлеру для поверхностных слоев пластины на упругом основании.

При таком соотношении усилий скорость перемещения штампа должна быть больше или равна 0.

Исходя из условия «движения» штампа под действием указанных нагрузок ( $P$ ,  $fP$ ) они должны удовлетворять неравенству

$$P < \frac{1}{f} \left( \frac{n^2\pi^2}{l_2^2} E_c l + \frac{l_2^2 \beta}{n^2\pi^2} - mV^2 \right). \quad (28)$$

Таким образом под критической скоростью  $V_{кр}$  будем понимать такую скорость перемещения штампа, при которой, исходя из усилий, приложенных к штампу ( $P$ ,  $fP$ ) в поверхностных слоях балки-полоски наступает состояние потери ими продольной устойчивости.



Если представить, что бегущая волна перемещается вдоль полосы по закону

$$y(x, t) = A_V \sin \frac{\pi}{\lambda} (x - Vt), \quad (29)$$

где  $\lambda = \frac{l_2}{n}$  – длина одной полуволны, располагающейся впереди движущегося штампа;  $l_2$  – длина деформированного участка впереди движущегося штампа;  $n$  – количество полуволн на участке полосы  $l_2$ .

То в результате подстановки  $\lambda$  в выражение (27) получим

$$V_{кр} = \sqrt{\frac{EI}{m} \left( \frac{\pi^2}{\lambda^2} + \frac{\lambda^2}{\pi^2} \cdot \frac{\beta}{E_c I} - \frac{T}{E_c I} \right)} = \sqrt{\frac{EI}{m} \cdot \frac{\pi^2}{\lambda^2} + \frac{\lambda^2 \beta}{m \pi^2} - \frac{fP}{m}}, \quad (30)$$

Тогда условие (28) перепишем в виде

$$P < \frac{1}{f} \left( \frac{\pi^2}{\lambda^2} E_c I + \frac{\lambda^2 \beta}{\pi^2} - mV^2 \right). \quad (31)$$

Обращаясь к (30) мы записали критическую скорость через длину деформационной волны, образованную действием касательного усилия.

Для установления зависимости между определением критических скоростей при действии отдельно вертикальной  $P$  и касательной нагрузок  $fP$  рассмотрим определение критической скорости для балки, нагруженной движущейся вертикальной силой [2].

Предположим, что уравнение поперечных колебаний балки-полоски на упругом основании описывается уравнением

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \beta y + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (32)$$

Деформации бесконечной по длине балки-полоски могут быть определены исходя из граничных условий задачи для середины полосы  $h/2$  (по перерезывающим силам).

В результате подстановки (11) в уравнение (32) получим выражение для критической скорости задачи В.Л. Бидермана [3], которая примет вид (при действии вертикальной подвижной нагрузки)

$$V_{кр}^* = \sqrt{\frac{E_c I}{m} \left( \frac{\pi^2}{\lambda^2} + \frac{\beta}{E_c I} \cdot \frac{\lambda^2}{\pi^2} \right)}, \quad (33)$$

Представленные выражения (30), (33) отличаются на величину  $-\frac{fP}{m}$  под знаком квадратного корня.

В задаче о перемещении подвижной нагрузки следует рассматривать отдельно скорость перемещения подвижной нагрузки (под штампом  $P$ ,  $fP$ ), а также скорость распространения фронта бегущей волны. В задаче скорость перемещения фронта бегущей волны для большинства практических случаев





намного превышает скорость перемещения штампа [3].

Скорость перемещения фронта бегущей волны определяется как критическая скорость перемещения штампа.

Если скорость перемещения штампа совпадает со скоростью перемещения фронта бегущей волны, то динамические нагрузки, деформации и перемещения в полосе неограниченно возрастают.

Заметим, что для случая перемещения касательной нагрузки по балке критическая скорость снижается – пропорционально коэффициенту понижения скорости бегущей волны  $v$

$$v = \frac{V_{кр}}{V_{кр}^*} = \sqrt{1 - \frac{fP}{E_c I \cdot \frac{\pi^2}{\lambda^2} + \beta \cdot \frac{\lambda^2}{\pi^2}}}, \quad (34)$$

Физический смысл критической скорости  $V_{кр}^*$  состоит в том, что она представляет собой наименьшую скорость фронта бегущей волны в полосе. Как следует из [3], если  $\lambda = \lambda_{кр} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{4E_c I}{\beta}}$ , то скорость распространения волны в полосе достигает минимума равного  $V_{кр}^*$ . Следовательно, значительное возрастание прогибов полосы под грузом (штампом) имеет место тогда, когда скорость движения вертикальной нагрузки ( $P$ ) приближается к скорости распространения фронта бегущей волны. Поэтому вывод о бесконечном возрастании прогибов является следствием того, что при постановке задачи не были учтены демпфирующие и инерционные свойства штампа. С учетом этих особенностей прогибы полосы будут возрастать, но сохранят конечные значения. Отметим, что в балке на упругом основании эти величины являются достаточно большими. Так, например, для железнодорожного рельса эта величина равна 1000 км/час, что намного превышает реальную скорость движения составов.

Аналогичные явления происходят в дисках газовых турбин, в которых опасные вибрации возникают при совпадении скорости вращения со скоростью распространения волн изгиба по окружности диска. Вибрации диска являются следствием того, что аксиальное давление сгоревших газов представляет собой по отношению к вращающемуся диску подвижную нагрузку. Кроме того, важным примером возникновения колебаний при совпадении скорости движения нагрузки со скоростью бегущей волны является так называемая критическая скорость качения пневматических шин (особенно в авиации) [3].



Таким образом, динамическая задача о вертикальной нагрузке, движущейся по полосе, расположенной на упругом основании, при неограниченном возрастании прогибов под штампом, в случае совпадения скорости движения груза и скорости движения фронта бегущей волны (по полосе) может быть реализована для движения скоростных автомобилей и самолетов в режиме взлет-посадка. В данном случае реализуется так называемый «волновой резонанс». Заметим, что это понятие пока не является общепринятым.

Характерно, что при малых скоростях качения основные деформационные процессы реализуются в непосредственной близости от площадки контакта колеса с основанием, если же скорости качения близки к критическим, то на боковых поверхностях колеса возникают волны, а на поверхностях катания – гофры, резко возрастает сопротивление перекачиванию, вследствие чего возникает саморазогрев колеса и быстрый выход его из строя.

Аналогичные процессы происходят и при прокатывании железнодорожных колес, при этом из-за невысокой линейной скорости колес «волновой» резонанс не наступает, а проявляются температурные эффекты и саморазогрев на площадке контакта колеса и рельса.

При действии вертикальных и горизонтальных нагрузок, в соответствии с формулой (30), происходит снижение критической скорости за счет влияния касательного усилия.

Кроме того, для балки-полоски на упругом основании, помимо геометрических микронеровностей, совместное воздействие усилий ( $P$ ,  $fP$ ) приводит к образованию деформационных микронеровностей, которые могут быть преодолены путем ударного взаимодействия с деформационными и геометрическими неровностями во встречной детали. В результате такого взаимодействия часть кинетической энергии движущегося штампа будет направлена на разрушение ближайших микронеровностей. Ударная волна, отразившаяся от препятствия, впереди от движущегося штампа, будет направлена в сторону противоположную перемещению штампа, дойдя конца стержня, отразится от него и будет двигаться в сторону движения штампа, дойдя до противоположного конца стержня, отразится от него и будет двигаться снова в сторону противоположную перемещению штампа и так до тех пор, пока этот местный волновой процесс не будет завершен. Параллельно с волновым процессом будет совершаться динамический процесс в самом стержне, связанный с деформациями стержня. С целью описания динамической задачи о



продольной устойчивости поверхностных слоев деталей, опирающихся на более податливые слои материала деталей, исходим из задачи о внезапном нагружении стержня продольной нагрузкой, которая превышает в « $n$ » раз критическую силу Эйлера  $T_{кр}^э$ . Данная задача была поставлена и решена академиком М.А. Лаврентьевым, при условии, что продольная сила приложенная к стержню является величиной постоянной ( $T = const$ ). Однако это не совсем так, по крайней мере, до окончания времени протекания переходных процессов в стержне.

Для того, чтобы придать строгости в постановке задачи, авторами принята расчетная схема с боковыми ограничителями, которые в некоторый момент времени исчезают, и поэтому возникающие движения, после снятия ограничителей, сразу можно описывать с помощью дифференциального уравнения, предложенного М.А. Лаврентьевым [4].

Для постановки и решения задачи о продольной устойчивости поверхностных слоев в рамках вопроса о разрушениях наружных покрытий (слоев) при трении и износе, было принято условие, что балка-полоска опирается на упругое основание с заданным коэффициентом отпора (по гипотезе Винклера). Принятые ограничения нарушаются, если  $T \geq T_{кр} > T_{кр}^э$ . Такой подход позволяет в начальный момент взаимодействия штампа и поверхностных слоев рассмотреть продольный (волновой) переходный процесс. Как следует из [3], можно рассматривать, вместо переходного процесса с изгибным волнообразованием, с достаточной точностью переходный продольный волновой процесс. В этом случае погрешность вычислений не превышает  $10 \div 15\%$  [3, 5]. Более точный подход возможен при использовании в исследованиях расчетной схемы и уравнений для балки С.П. Тимошенко. Исходя из выполненных решений и их анализа следует вывод о том, что перемещение балки-полоски при внезапном приложении нагрузки от штампа на деформационную волну (ее вершину), ее фактические деформации, напряжения действующие в соответствующих точках на продольной оси балки, в два раза превысят свои статические значения. То есть, даже при установившемся деформационном волнообразовании коэффициент перегрузки превышает значение  $n > 1$ , а фактически действующие усилия  $T$  более чем в два раза  $T_d \geq 2T$  превышает статические значения, следовательно, коэффициент перегрузки необходимо принимать  $n \geq 2$ . Как было ранее установлено [1], коэффициент

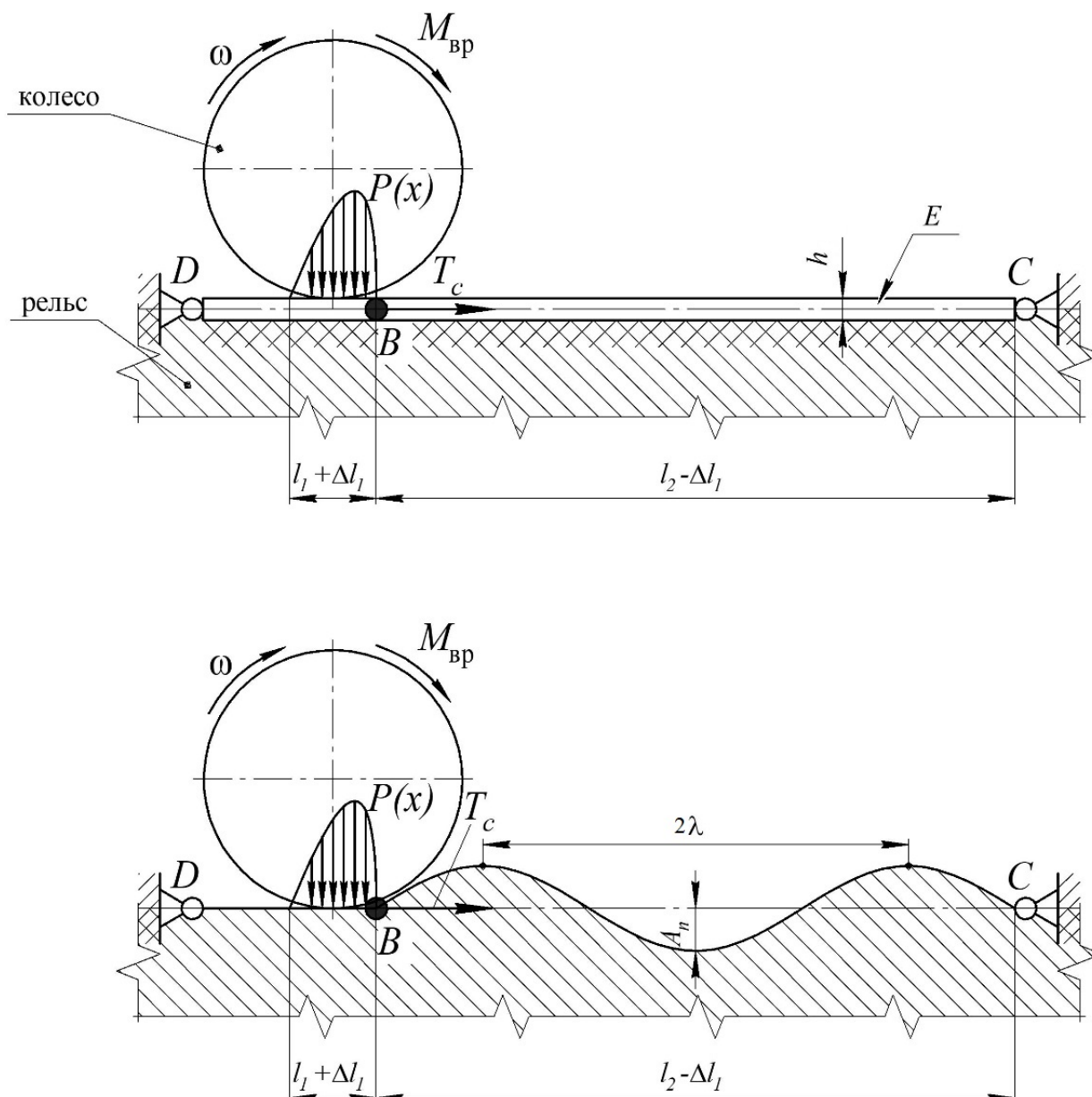


формы колебаний для балки-полоски в зоне ее деформации находятся в пределах  $2 \leq n \leq 2,5$ . Следовательно, состояние поверхностных слоев при их деформациях и колебаниях будут неустойчивыми, и при внешне безопасных нагрузках может произойти искажение формы, хрупкое или усталостное разрушение поверхностных слоев.

В случае взаимодействия деталей при трении будем предполагать, что передняя кромка штампа взаимодействует с деформационными микронеровностями полосы, так как каждая последующая деформационная микронеровность опережает предыдущую на расстояние, равное шагу гофрированной деформационной поверхности, при этом передняя кромка штампа (или деформационная микронеровность штампа) встречается с очередной микронеровностью полосы (рис. 2). Иначе говоря, жесткая кромка штампа встречает очередной деформационный выступ на полосе с шагом  $2\lambda$ . Такую нагрузку при взаимодействии штампа с полосой можно уподобить действию на полосу периодически повторяющихся импульсов. Эта нагрузка будет пульсирующей для гребней на поверхностных слоях. Так данный процесс будет непрерывно повторяться по мере образования очередных деформационных микронеровностей впереди штампа и последующего их «ударного» выполаживания под штампом. Фактически будет иметь место ударное срезание или сглаживание вершин микронеровностей (при срезании  $T > T_{кр}$ , при выполаживании  $T \leq T_{кр}$ ). В момент времени, когда штамп (его передняя кромка) взаимодействует с очередной микронеровностью на полосе, жесткость системы возрастает, а в моменты времени соответствующие сбросу нагрузки, жесткость в системе убывает, то есть в системе ступенчато изменяется жесткость. Такие системы следует отнести к системам с параметрической нагрузкой.

Систему с образованием деформационных микронеровностей в первом приближении будем считать детерминированной.

Если на поверхности контакта будут преобладать геометрические микронеровности, то вместо указанных усилий, продолжительности импульса и шага геометрических микронеровностей следует подразумевать математические ожидания указанных величин.



**Рисунок 2 – К деформированию поверхностных слоев рельса впереди набегающего колеса**

$E$  – поверхностный слой рельса в виде балки на упругом основании;  $h$  – толщина балки;  $D, B, C$  – условные опоры балки;  $P(x)$  – распределенная нагрузка от штампа в виде катящегося цилиндра (колеса);  $A_n$  – амплитуда деформационной волны для формы деформации с индексом  $n$ ;  $2\lambda$  – шаг образования деформационных микронеровностей;  $l_1, l_2$  – соответственно длина участка контакта штампа с полосой и длина участка деформации впереди штампа.

Рассматривая процесс образования деформационных микронеровностей можно использовать систему неподвижных осей координат, тогда деформационные и волновые процессы по длине полосы будут происходить под воздействием всех гребней полосы, распределенных по длине детали с шагом



равным расстоянию между соседними гребнями, и отстоящих друг от друга по времени, равному периоду циклического процесса.

В случае рассмотрения всего процесса в подвижной системе координат, перемещающейся с линейной скоростью штампа  $V$ , можно полагать, что движущаяся балка-полоска находится под воздействием одного ударного импульса.

С целью исследования ударно-волновых процессов в балке-полоске, обратимся к совокупности дифференциальных уравнений, которую получим далее, где в качестве нагрузки выступают касательные усилия, вызванные весом штампа и его касательной составляющей при продольном изгибе. Отметим, что после описания (очередного) цикла взаимодействия переднего края штампа с рассматриваемой микронеровностью произойдет его контакт со следующей микронеровностью (или их группой), что приводит к возникновению волнового переходного режима в балке-полоске и штампе, который будет продолжен при контакте штампа с последующими микронеровностями. Таким образом, волновой переходной процесс будет незатухающим, так как будут включаться в работу новые группы микронеровностей. При этом переходные процессы от предыдущих взаимодействий в большинстве случаев не заканчиваются, в основном для деталей большой протяженности. Поэтому такие процессы сопровождаются непрерывными волновыми воздействиями различной интенсивности, в разных частотных диапазонах.

Здесь важно отметить, что приращение количества движения штампа идет на создание импульса силы, приложенного к каждой микронеровности, то есть сила, идущая на разрушение деформационной микронеровности, прикладывается внезапно. Это значит, что коэффициент динамичности силового воздействия составляет  $k_d \geq 2$ .

В процессе рассмотрения взаимодействия деформационных или группы геометрических микронеровностей происходит, при внешне «статическом» нагружении, внезапное приложение силы, которая превосходит критическую силу Эйлера  $P_Э = \frac{\pi^2 E_c I}{l^2}$  в  $n$  раз.

Уравнение продольной устойчивости балки-полоски из поверхностных слоев под действием внезапно приложенной нагрузки, запишем в форме (30) с учетом касательного усилия и жесткости упругого основания. Также вводим в рассмотрение начальную неправильность балки-полоски (или ее



эксцентриситет).

Для того чтобы условию  $T = const$  придать обоснованный вид, примем, что балка-полоска опирается на упругое основание и при дальнейшей ее деформации, только под действием усилия  $T > T_{кр}$  она изогнется по двум или более полуволнам [1]. Поэтому предположим, что в начальный момент взаимодействия штампа и балки-полоски, последняя за счет вертикальных связей основания, ведет себя как упругий прямолинейный стержень, подверженный прохождению продольных волн. После завершения процесса прохождения упругих волн под действием продольной силы  $T > T_{кр}$  балка-полоска теряет продольную устойчивость, при этом она утрачивает вертикальные упругие связи и приобретает синусоидальную форму упругой линии.

Тогда задачу о динамической форме потери устойчивости поверхностных слоев балки-полоски представим в виде [4]

$$m_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + E_c I \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + T \frac{\partial^2 (y + y_0)}{\partial x^2} + \beta y = 0. \quad (35)$$

Обратимся к уравнению (1), которое описывает продольный изгиб балки-полоски с перемещающимися вертикальной  $P$  и касательной нагрузкой  $T$  по отношению к неподвижной системе координат (первоначально, при постановке задачи), по схеме, использованной в [4]. Рассматриваемая задача (35) отличается от задачи, описанной уравнением (1) тем, что данная балка-полоска изначально рассматривается в подвижной системе координат, имеет начальную неправильность  $y_0(x)$ , определенную первоначальной кривизной, и внезапно нагружается касательной нагрузкой  $T = const$ .

В уравнении (35) все слагаемые, кроме слагаемого с параметрической нагрузкой  $T$  содержат упругий прогиб  $y(x, t)$ , а в слагаемом содержащем параметрическую нагрузку  $T$ , изгибающий момент (от  $T$ ) развивается на полном прогибе  $y_1 = y + y_0$ .

В некоторых интерпретациях динамической задачи М.А. Лаврентьева исходное дифференциальное уравнение (35) приобретает вид (36). Принципиального различия в этих уравнениях нет. Для определенности остановимся на уравнении (36). Тогда будем иметь

$$E_c I \frac{\partial^4 (y_1 - y_0)}{\partial x^4} + m_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \beta y_1 + T \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = 0, \quad (36)$$

где  $m_0$  – погонная масса балки-полоски;  $y_0$  – начальная кривизна или



эксцентриситет приложения нагрузки (может быть принят  $y_0 = \frac{h}{2}$ , фактически начальная неправильность или микронеровность балки-полоски);  $y_1$  – полный прогиб балки-полоски;  $y$  – дополнительный прогиб балки-полоски;  $\beta$  – коэффициент отпора упругого основания.

$r = \frac{\beta}{E_c I}$  – реактивный коэффициент упругого основания (основного металла под покрытием);  $T = nT_{\text{Э}}$  – внезапно приложенная продольная сила, в  $n$  раз превышающая критическую силу Эйлера (для схемы на рис. 1), где  $n$  – коэффициент нагрузки (может быть переменной величиной);  $T_{\text{Э}} = T_{\text{кр}}^{\text{Э}}$  – сокращенная запись критической силы.

Представим функции  $y_1, y_0$  в виде разложений в тригонометрические ряды

$$y_1 = \sum_{k=1,2,3,\dots}^{\infty} z_{1k}(t) \sin \frac{k\pi x}{l}, y_0 = \sum_{k=1,2,3,\dots}^{\infty} z_{0k} \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (37)$$

где  $k$  – номер формы потери устойчивости балки-полоски.

После подстановки (37) в (36) получим

$$\ddot{z}_{1k} + \left[ \left( \frac{\pi k}{l} \right)^4 \cdot \frac{E_c I}{m_0} - \frac{T}{m_0} \cdot \left( \frac{\pi k}{l} \right)^2 + \frac{r}{m_0} \right] \cdot z_{1k} = \left( \frac{\pi k}{l} \right)^4 \cdot \frac{EI}{m_0} \cdot z_{0k}, \quad (38)$$

$$\ddot{z}_{1k} + \left[ \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \cdot \frac{T_{\text{Э}}}{m_0} - \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \cdot \frac{T_{\text{Э}}}{m_0} + \frac{r}{m_0} \right] \cdot z_{1k} = \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \cdot \frac{T_{\text{Э}}}{m_0} \cdot z_{0k}, \quad (39)$$

$$\ddot{z}_{1k} + \left[ \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \frac{T_{\text{Э}}}{m_0} \cdot (k^2 - n^2) + \frac{r}{m_0} \right] \cdot z_{1k} = \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \cdot \frac{T_{\text{Э}}}{m_0} \cdot z_{0k}. \quad (40)$$

Введем обозначение

$$\omega_k^2 = \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \frac{T_{\text{Э}}}{m_0} \cdot (k^2 - n^2) + \frac{r}{m_0}. \quad (41)$$

Если выражение в квадратных скобках положительное, то решение уравнения

$$\ddot{z}_{1k} + \omega_k^2 \cdot z_{1k} = \frac{\pi^2}{l^2} \cdot k^2 \cdot \frac{T_{\text{Э}}}{m_0} \cdot z_{0k} \quad (42)$$

ищем в виде

$$z_{1k}(t) = A \cdot \sin \omega_k t + B \cdot \cos \omega_k t + \left( \frac{\pi k}{l} \right)^2 \cdot \frac{T_{\text{Э}}}{m_0 \cdot \omega_k^2} \cdot z_0. \quad (43)$$

Данное уравнение (38) или (42) рассматриваем при начальных условиях

$$z_{1k}(0) = z_{0k}, z'_{1k}(0) = 0. \quad (44)$$

$z_{1k}(t)$  – общее решение неоднородного уравнения состоит из общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Из (43) получим:

$$z'_{1k}(t) = A \omega_k \cdot \cos \omega_k t - B \omega_k \cdot \sin \omega_k t.$$

Для  $z'_{1k}(0) = A \omega \cdot 1 - B \omega \cdot 0$ , следует, что  $A = 0; B \neq 0$ .





Тогда

$$z_{1k}(t) = B \cdot \cos \omega_k t + \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \cdot \frac{T_{\text{э}}}{m_0 \cdot \omega_k^2} \cdot z_{0k}. \quad (45)$$

Так как  $z_{1k} = z_{10k}$ , то  $z_{10k} = B \cdot 1 + \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \cdot \frac{T_{\text{э}}}{m_0 \cdot \omega_k^2} \cdot z_{0k}$ , откуда

$$\left[1 - \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \cdot \frac{T_{\text{э}}}{m_0 \cdot \omega_k^2}\right] \cdot z_{0k} = B.$$

Тогда общее решение (38), (42) приобретает вид

$$z_{1k}(t) = \left[1 - \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \cdot \frac{T_{\text{э}}}{m_0 \cdot \omega_k^2} \cdot \cos \omega_k t + \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \cdot \frac{T_{\text{э}}}{m_0 \cdot \omega_k^2}\right] \cdot z_{0k}, \quad (46)$$

$$z_{1k}(t) = \left[1 + \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \cdot \frac{T_{\text{э}}}{m_0 \cdot \omega_k^2} \cdot (1 - \cos \omega_k t)\right] \cdot z_{0k}.$$

Если номер  $n$  (коэффициент перегрузки) будет значительным, при этом  $k < n$ , а разность  $k^2 - n^2$  будет отрицательной, то решение уравнения (47) приобретает вид (48).

$$\ddot{z}_{1k} - \Omega_k^2 \cdot z_{1k} = \frac{\pi^2}{l^2} \cdot k^2 \cdot \frac{T_{\text{э}}}{m_0} \cdot z_{0k}, \quad (47)$$

где  $\Omega_k^2 = \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \frac{T_{\text{э}}}{m_0} \cdot (k^2 - n^2) + \frac{r}{m_0} > 0$ .

Общее решение (47)

$$z_{1k}(t) = A \cdot \text{sh} \Omega_k t + B \cdot \text{ch} \Omega_k t + \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \cdot \frac{T_{\text{э}}}{m_0 \cdot \Omega_k^2} \cdot z_{0k}. \quad (48)$$

$$z_{1k}(0) = z_{0k}, z'_{1k}(0) = 0, z'_{1k}(t) = A \Omega_k \cdot \text{ch} \Omega_k t + B \Omega_k \cdot \text{sh} \Omega_k t,$$

$$z'_{1k}(0) = A \Omega_k \cdot 1 + B \Omega_k \cdot 0 = 0, \text{ значит } A = 0; B \neq 0.$$

$$z_0 = B - \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \cdot \frac{T_{\text{э}}}{m_0 \cdot \Omega_k^2} \cdot z_0, z_0 \cdot \left[1 + \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \cdot \frac{T_{\text{э}}}{m_0 \cdot \Omega_k^2}\right] = B$$

$$z_{1k}(t) = \left[1 + \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \cdot \frac{T_{\text{э}}}{m_0 \cdot \Omega_k^2}\right] \cdot z_0 \cdot \text{ch} \Omega_k t - \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \cdot \frac{T_{\text{э}}}{m_0 \cdot \Omega_k^2} \cdot z_0$$

$$z_{1k}(t) = \left[1 + \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \cdot \frac{T_{\text{э}}}{m_0 \cdot \Omega_k^2} \cdot \text{ch} \Omega_k t - \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \cdot \frac{T_{\text{э}}}{m_0 \cdot \Omega_k^2}\right] \cdot z_0$$

$$z_{1k}(t) = \left[1 + \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \cdot \frac{T_{\text{э}}}{m_0 \cdot \Omega_k^2} \cdot (\text{ch} \Omega_k t - 1)\right] \cdot z_0. \quad (49)$$

После построения решений в форме (46) или (49), удовлетворяющих начальным условиям  $z_{1k}(0) = z_{0k}$ ,  $z'_{1k}(0) = 0$ , фактически получим окончательные решения, индекс  $k$  характеризует вид формы потери устойчивости балки-полоски из поверхностных слоев. Так как эта деформируемая балка в принятых границах длин является «условной», и при этом более ранние исследования [1] показали, что длина балки-полоски на упругом основании, подверженном деформации, имеет число полуволн



$k = 2,41$  (принимаем для расчетов  $k = 2$  (или 3)), а длина полуволны зависит от физических свойств наружных и внутренних слоев полосы [1]. Для данного случая коэффициент перегрузки при приложении сжимающего усилия  $T$  удовлетворяет неравенству  $n < k$ . Тогда решение (38) получим в виде (46). Полученное решение (46) будет ограниченным и устойчивым.

Для расчетного случая, представленного уравнением (38), при условии  $k < n$ , перегрузка продольного усилия  $T$  (по отношению к силе  $T_3$ ) может быть значительной, в этом случае  $k = 2 \div 3$ , а  $n > 3$ .

Судя по характеру решения (49) при  $k < n$  прогибы балки-полоски на упругом основании нарастают во времени и следовательно поверхностные слои балки-полоски ведут себя неустойчиво.

Такие проявления местных перегрузок при деформировании наружных слоев могут приводить к образованию трещиноватостей, сколов, выкрашиванию поверхностных слоев.

В этом состоит особенность взаимодействия переднего края штампа с деформационной микронеровностью (или совокупностью геометрических микронеровностей). Причем, после того как штамп преодолет эту деформационную микронеровность, на длине равной шагу этой деформационной микронеровности, то штамп встретит гребень следующей микронеровности и таким образом установится периодический процесс преодоления деформационных микронеровностей на полосе. Исходя из рассмотренных соображений можно считать процесс ударного взаимодействия микронеровностей импульсным, который повторяется с частотой образования новых микронеровностей. Подобный характер взаимодействия вновь образовавшихся и уже существующих микронеровностей может служить подтверждением ударно-волновой теории трения и изнашивания. В результате ударного взаимодействия штампа и микронеровностей происходит образование и прохождение ударных (в основном продольных) волн, от места их возникновения на полосе, до конца полосы, который находится позади движущегося штампа, и отразившись от этого конца полосы, ударная волна движется в направлении перемещения штампа и далее отразившись от конца полосы, находящегося впереди штампа, продолжает двигаться в направлении противоположном движению штампа и отразившись от конца полосы, находящегося позади штампа продолжает движение вперед, после этого процесс



прохождения волн многократно повторяется до их полного затухания. После завершения переходного периода по прохождению ударных волн ограничения, наложенные на поперечные перемещения балки-полоски преодолеваются, и тогда можно считать  $T = const$  [4], и уравнения (35), (36) описывают динамические процессы в поверхностных слоях балки-полоски.

Таким образом, не вникая в особенности дальнейшего взаимодействия последующих деформационных микронеровностей со штампом, и пока не описывая волновой переходный процесс при прохождении штампа по микронеровностям, в результате депланации поверхностных сечений балки-полоски имеет место непрерывный деформационно-волновой процесс.

Кроме того, на основании изложенного можно утверждать, что рассматриваемый динамический процесс является подтверждением проявления еще и ударно-волновой природы явлений сопровождающих процессы трения и изнашивания.

Также можно утверждать, что ударно-волновые эффекты при трении и изнашивании позволяют трактовать гипотезу Боудена и Тейбора о том, что трение является результатом пластического отеснения материала и динамического разрушения «мостиков сварки» при «схватывании» микронеровностей [5, 1]. В случае ударно-волнового подхода за счет диссипации энергии в микронеровностях двух взаимодействующих деталей, происходит саморазогрев и последующее схватывание микронеровностей на трущихся поверхностях. В результате микросхватывания дальнейшее равномерное движение одного изделия по шероховатой поверхности другого будет затруднено, при этом происходит внезапная (кратковременная) приостановка движения деталей, с последующим приложением продольной нагрузки, которая идет на разрушение «мостиков сварки».

Эти процессы сопровождаются волновыми эффектами, которые протекают по всей длине стержня, и при этом усилие  $T(x, t)$  до завершения переходного периода, во время разрушения «мостиков сварки» также не является постоянным [4].

Для выяснения волновых особенностей взаимодействия штампа с полупространством, обратимся к волновой задаче С.П. Тимошенко и рассмотрим фронт продольных волн. С целью упрощения постановки задачи будем полагать, что преобладающими являются продольные волны. Поэтому в исходной системе уравнений, описывающих прохождение упругих волн, для



балки С.П. Тимошенко [3], пренебрегаем правыми частями уравнений, и таким образом приходим к продольным колебаниям балки-полоски с сосредоточенной продольной силой. Причем, согласно [4] на балку-полоску наложены поперечные ограничения в виде упругого основания и его реакции, заметим, что коэффициент отпора упругого основания зависит как от упругих свойств среды, так и от формы потери устойчивости, как балки-полоски, так и самого упругого полупространства, то есть балка-полоска испытывает продольные деформации и способствует прохождению только упругих продольных волн.

Отметим, что фактически для задачи М.А. Лаврентьева [4], до тех пор, пока продольная сила  $T$  не преодолеет поперечные ограничения, балка-полоска находится в прямолинейном недеформированном состоянии (до окончания переходного процесса), а переходный процесс возникает только тогда, когда штамп встречает сопротивление в виде деформационной микронеровности, которая еще не образовалась (так как продольный изгиб пока не проявился). Поэтому при рассмотрении продольного (переходного) волнового процесса условно считаем, что балка-полоска (стержень) встречает сопротивление в виде геометрических и деформационных микронеровностей, а также «мостиков сварки», расположенных с шагом  $n_1$ , вычисленным в [1].

Тогда волновое уравнение (для описания продольных колебаний балки-полоски) запишем:

$$m_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = EF \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - T \delta(x - l), \quad (50)$$

где  $\delta(x - l)$  – дельта функция Дирака;  $l$  – длина условного стержня, согласно [4].

Разложим  $\delta$  функцию в ряд по собственным функциям свободных колебаний стержня [1]

$$\delta(x - l) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} C_k \cdot \sin \frac{\pi k x}{2l}, \quad (k = 1, 3, 5, \dots). \quad (51)$$

Дельта функцию применяем потому, что заданная сила  $T$  является дискретной, приложенной в точке  $A$ , на расстоянии  $l$  от начала координат (рис. 3). Коэффициенты разложения

$$C_k = \frac{2}{l} \int_0^l \delta(x - l) \cdot \sin \frac{\pi k x}{2l} \cdot dx = \frac{2}{l} \cdot (-1)^{\frac{k-1}{2}}, \quad (52)$$

так как имеет место интеграл [7]

$$\int_0^l \varphi(z) \cdot \delta(z - z_1) \cdot dz = \varphi(z_1).$$

Тогда уравнение (50) принимает вид

$$m_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = EF \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{2T}{l} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \sin \frac{\pi k x}{2l} (-1)^{\frac{k-1}{2}}. \quad (53)$$



Решение уравнения (50) или (53) представим в виде разложения по собственным функциям задачи  $\sin \frac{\pi k x}{2l}$

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \frac{\pi k x}{2l}, \quad (k = 1, 3, 5, \dots). \quad (54)$$

После подстановки (54) в уравнение (53) получим

$$\ddot{u}_k + a^2 \left(\frac{\pi k}{2l}\right)^2 u_k = -\frac{2T}{m_0 l} (-1)^{\frac{k-1}{2}}, \quad (k = 1, 3, 5, \dots), \quad (55)$$

где  $a^2 = \frac{EF}{m_0}$  – квадрат скорости распространения продольных волн.

Можно показать, что корни характеристического уравнения (55) будут чисто мнимыми, тогда общее решение (55) представим в виде

$$u_k(t) = C_1 \cdot \sin \frac{\pi k}{2l} at + C_2 \cdot \cos \frac{\pi k}{2l} at + A_k, \quad (56)$$

при начальных условиях  $u_k(0) = \dot{u}_k(0) = 0$

$$\dot{u}_k(t) = C_1 \cdot \frac{\pi a k}{2l} \cdot \cos \frac{\pi k}{2l} at - C_2 \cdot \frac{\pi a k}{2l} \cdot \sin \frac{\pi k}{2l} at, \quad (57)$$

$$\dot{u}_k(0) = C_1 \cdot \frac{\pi a k}{2l} \cdot 1 - C_2 \cdot \frac{\pi a k}{2l} \cdot 0.$$

После использования начальных условий (57) получаем  $C_1 = 0$ ,  $C_2 \neq 0$ . И, так как  $A_k$  – частное решение (55), то ищем это решение, предполагая  $A_k = const$  по форме правой части.

После определения  $A_k$  из (55) находим  $C_2$  из (57)

$$A_k = -\frac{2T}{m_0 l} \cdot \frac{4l^2}{\pi^2 a^2 k^2} = -\frac{8Tl(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{m_0 \pi^2 a^2 k^2}, \quad (58)$$

тогда

$$u_k(t) = C_2 \cdot \cos \frac{\pi k}{2l} at = \frac{8Tl(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{m_0 \pi^2 a^2 k^2} \cdot \cos \frac{\pi k}{2l} at, \quad (59)$$

где  $C_2 = \frac{8Tl(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{m_0 \pi^2 a^2 k^2}$

$$y(x, t) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{8Tl(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{m_0 \pi^2 a^2 k^2} \cdot \left( \cos \frac{\pi k}{2l} at - 1 \right) \sin \frac{\pi k x}{2l}, \quad (60)$$

$$y_{max} = \frac{2Tl}{EF}, \quad (61)$$

то есть при внезапном приложении нагрузки, перемещение торца стержня в два раза больше чем при статическом нагружении.

В случае рассмотрения волнового переходного процесса в балке-полоске из наружных слоев материала детали, можно показать, что продольное усилие  $P(x, t)$  по длине детали и по времени (при  $T = const$ ) будет переменным, пока не закончится переходный процесс.



$$P(x, t) = EF \frac{\partial y}{\partial x} = EF \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{8T}{m_0 \pi a^2} \cdot \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k} \left( \cos \frac{\pi k}{2l} at - 1 \right) \cos \frac{\pi k x}{2l}, \quad (62)$$

Так как

$$\sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k} = \frac{\pi}{4}, \quad (63)$$

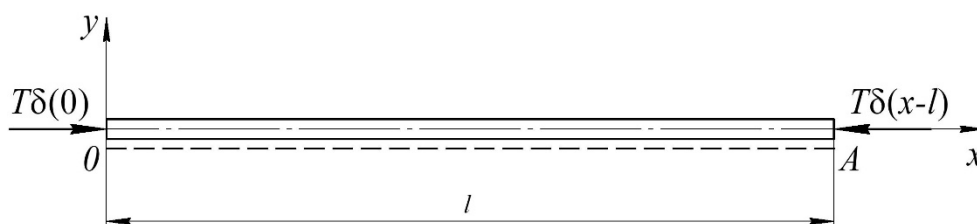
тогда

$$P(x, t) = EF \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{2T}{m_0 a^2} \cdot \left( \cos \frac{\pi k}{2l} at - 1 \right) \cos \frac{\pi k x}{2l}, \quad (64)$$

При рассмотрении уравнения продольных колебаний и распространения упругих деформационных волн (50), (55) предполагалось, что постоянная продольная сила  $T$  была приложена внезапно на расстоянии  $l$  от начала координат (рис. 3) уравнение (50) и вспомогательное уравнение (55) были представлены в общем виде под воздействием внешне приложенной касательной силы  $T$ . Такая схема приложения активной нагрузки может быть характерна для балки-полоски в подвижной системе координат, нагруженной не внезапно приложенной силой, а импульсной нагрузкой, которая прикладывается к изолированной микронеровности в течение очень короткого промежутка времени  $t_1$ . В такой постановке задача будет квазистатической, где ударный импульс движется со скоростью перемещения штампа (и скоростью перемещения подвижной системы координат)  $V$ . Если же рассмотреть процесс взаимодействия микронеровности с источником импульса силы в неподвижной системе координат, то это будет многократно повторяющийся процесс с периодом, равным шагу расположения соседних микронеровностей  $2\lambda$ , преодолеваемых со скоростью  $V$ . Рассмотрим взаимодействие первой деформационной неровности с передней кромкой штампа. По истечению времени преодоления шага между первой и второй микронеровностями  $2\lambda$ , ко второй микронеровности будет приложена импульсная нагрузка с коэффициентом динамичности (перегрузки)  $n \geq 2$ . Также будут нагружаться все последующие микронеровности. Это нагружение будет представлено импульсными  $\delta$ -функциями, рис. 3, 4, как по длине балки-полоски (рис.3), так и во времени (рис. 4)  $T(t) = T[\delta(t) - \delta(t - t_1)]$ .

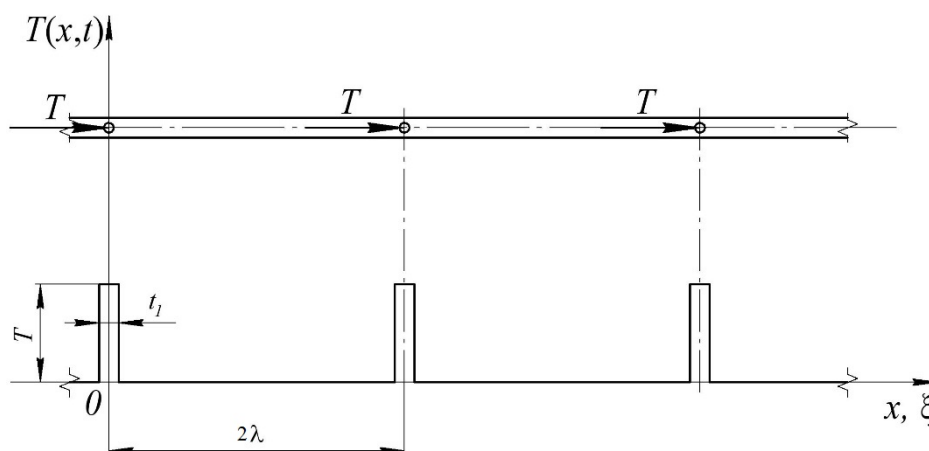
С учетом представления периодической импульсной нагрузки  $T(t)$  запишем уравнение (65)

$$\ddot{u}_k + a^2 \left( \frac{\pi k}{2l} \right)^2 u_k = - \frac{2T(t)}{m_0 l} (-1)^{\frac{k-1}{2}}. \quad (65)$$



**Рисунок 3 – Схема условного стержня, из наружных слоев детали с ограничителями поперечных деформаций**

$T$  – сжимающая сила;  $\delta(x - l)$ ,  $\delta(0)$  – дельта функция Дирака;  $l$  – длина условной балки (равна длине деформационной полуволны  $\lambda$ ).



**Рисунок 4 – Приложение периодической нагрузки к балке-полоске**

$\lambda$  – длина одной полуволны деформации балки-полоски;  $\Theta = 2\lambda/V$  – период ударных воздействий;  $T$  – амплитудное значение силового воздействия;  $t_1$  – продолжительность действия ударного импульса ( $t_1 \approx 0,1\Theta$ ).

Введем обозначение  $\omega_k^2 = a^2 \left(\frac{\pi k}{2l}\right)^2$ , тогда

$$\ddot{u}_k + \omega_k^2 \cdot u_k = -\frac{2T(t)}{m_0 l} (-1)^{\frac{k-1}{2}}. \tag{66}$$

Для решения подобных систем, с учетом действующей импульсной нагрузки в источнике [7] применен операционный метод решения, согласно которому вместо уравнения (65) или (66) рассматриваем его изображения по Лапласу вместе с начальными условиями

$$(S^2 + \omega_k^2) \cdot u_k(S) = u_{k0}S + \dot{u}_{k0} + \frac{2(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{m_0 l} \cdot T(S). \tag{67}$$

Далее совершаем переход от изображения функции к ее оригиналу

$$u_k(t) = u_{k0} \cdot \cos \omega_k t + \frac{\dot{u}_{k0}}{\omega_k} \cdot \sin \omega_k t + \frac{2(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{m_0 l} \cdot \int_0^t T(\tau) \sin \omega_k(t - \tau) d\tau. \tag{68}$$



Интеграл в (68) называется сверткой функций [7].

Запишем выражение для оригинала функции  $u_k(t)$  на интервале  $0 \leq t \leq \Theta$ , по аналогии с [7], в виде

$$u_k(t) = u_{k0} \cdot \cos \omega_k t + \frac{\dot{u}_{k0}}{\omega_k} \cdot \sin \omega_k t + \frac{2(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{m_0 \omega_k^2} \cdot T[\cos \omega_k(t - t_1) - \cos \omega_k t]. \quad (69)$$

Для других временных интервалов решение (65) также будет периодическим (интервал  $\Theta \leq t \leq \infty$ ).

Заметим, что для периодичности решения (69) необходимо, чтобы начальные условия определялись из дополнительных условий периодичности  $u_k(\Theta) = u_{k0}; \dot{u}_k(\Theta) = \dot{u}_{k0}$

$$u_k(t) = \frac{T \cdot \sin \omega_k \frac{t_1}{2}}{m_0 \omega_k^2} \cdot (-1)^{\frac{k-1}{2}} \left[ \frac{\cos \omega_k \left( t + \frac{\Theta - t_1}{2} \right)}{\sin \omega_k \frac{\Theta}{2}} + 2 \sin \omega_k \left( t - \frac{t_1}{2} \right) \right]. \quad (70)$$

С учетом значения  $\omega_k$  получим

$$u_k(t) = \frac{4Tl^2 \cdot \sin \omega_k \frac{t_1}{2}}{m_0 \pi^2 a^2 k^2} \cdot (-1)^{\frac{k-1}{2}} \left[ \frac{\cos \omega_k \left( t + \frac{\Theta - t_1}{2} \right)}{\sin \omega_k \frac{\Theta}{2}} + 2 \sin \omega_k \left( t - \frac{t_1}{2} \right) \right]. \quad (71)$$

$$y(x, t) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4Tl^2 \cdot \sin \omega_k \frac{t_1}{2} \cdot (-1)^{\frac{k-1}{2}}}{m_0 \pi^2 a^2 k^2} \left[ \frac{\cos \omega_k \left( t + \frac{\Theta - t_1}{2} \right)}{\sin \omega_k \frac{\Theta}{2}} + 2 \sin \omega_k \left( t - \frac{t_1}{2} \right) \right] \cdot \sin \frac{\pi k x}{2l}. \quad (72)$$

или

$$y(x, t) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{Tl^2 \cdot (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cdot \sin \omega_k \frac{t_1}{2}}{2m_0 a^2} \left[ \frac{\cos \omega_k \left( t + \frac{\Theta - t_1}{2} \right)}{\sin \omega_k \frac{\Theta}{2}} + 2 \sin \omega_k \left( t - \frac{t_1}{2} \right) \right] \cdot \sin \frac{\pi k x}{2l}. \quad (73)$$

При преобразовании (72) к виду (73) учтем значение ряда  $\sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8}$ .

Решение (73) записано для одного периода взаимодействия передней кромки штампа с вершиной одной деформационной микронеровности, в интервале  $0 \leq t \leq \Theta$ . После взаимодействия с этой микронеровностью, впереди штампа образуются новые микронеровности, и поэтому по истечении каждого последующего периода процесса наступает взаимодействие со следующей микронеровностью, и так непрерывно по мере перемещения штампа по балке-полоске. То есть при движении создается постоянный фон ударных волн различных частот (в том числе и звуковых волн) и различной интенсивности, следовательно, процессы трения и изнашивания сопровождаются постоянным прохождением волнового фронта широкого спектра. Отметим, что процессы трения и изнашивания, в первую очередь, обусловлены деформациями, возникающими впереди штампа, а затем ударным взаимодействием этих деформационных волн с вершинами деформационных микронеровностей во





встречной детали. Причем рассматриваемое ударное взаимодействие в массе всего стержня вызывает незатухающий переходный процесс.

Особенности взаимодействия подвижных деталей при трении и изнашивании позволяют трактовать фрикционные процессы, как с позиции деформационно-волновой гипотезы трения и изнашивания, так и ударно-волновой гипотезы трения и изнашивания, которая была сформулирована профессором А.И. Бажалом для описания процессов взаимодействия деталей перфораторов [9].

Как было нами установлено ударно-волновые процессы сопровождают все виды взаимодействия при трении и изнашивании и поэтому носят общий характер.

Кроме того, известная гипотеза Ф.П. Бодена и Д. Тейбора [5] о том, что трение является процессом разрушения мостиков сварки, возникающих при схватывании соприкасающихся поверхностей получает ударно-волновое обоснование.

В процессе движения штампа по балке-полоске (впереди штампа) возникают деформационные микронеровности, которые спустя несколько долей секунды выполаживаются поверхностью штампа (волнистой или гладкой) в местах взаимодействия микронеровностей. В результате рассеивания кинетической энергии движения, происходит саморазогрев выступающих элементов микронеровностей, до наступления эффекта схватывания их вершин. При этом, к перемещающемуся штампу, во время его движения «внезапно» (при схватывании) прикладывается постоянная сила, которая приводит к разрушению мостиков сварки, возникновению непрерывных переходных процессов, и рассеиванию тепловой энергии.

Таким образом, все указанные гипотезы проявления эффектов трения и изнашивания приводят к усталостному изнашиванию и разрушению поверхностных слоев деталей.

В работе [9] при рассмотрении машин ударного действия типа перфораторов и пневмоударников интуитивно была прослежена связь между ударными импульсами при протекании рабочих процессов, распространением упругих волн в элементах машины и их влиянием на трение и изнашивание деталей рассматриваемых машин. Это послужило толчком к формированию новой гипотезы процессов трения и изнашивания – так называемой ударно-волновой гипотезы. С целью обоснования этой гипотезы обратимся к процессу



протекания ударного взаимодействия деформационных микронеровностей с передней кромкой более твердого штампа. Рассматриваем нагружение балки-полоски касательной нагрузки в местах образования деформационных выступов, то есть в местах расположения вершин деформированной поверхности. При этом к каждой последующей вершине нагрузка прикладывается внезапно и после короткого времени приложения импульса силы нагрузка будет исчезать, но вместе с тем начнет распространяться фронт продольных ударных волн вдоль горизонтальной оси рассматриваемого стержня. По истечении отрезка времени, равному периоду протекания одного цикла  $\Theta$ , что в линейном перемещении равно длине волны между деформационными микронеровностями. После чего, процесс «мгновенного» приложения касательного усилия  $T(t)$  к следующей деформационной микронеровности повторится и при дальнейшем перемещении штампа установится импульсный периодический процесс, который будет завершен к окончанию рабочего периода машины.

Для осуществления ударного взаимодействия штампа и микронеровности на детали нет необходимости в возникновении автоколебательных режимов в области под штампом, поэтому достаточно образования деформационной волны в области перед штампом и последующего ее импульсного взаимодействия с передним гребнем штампа. Причем импульсный ударный процесс может быть аппроксимирован не только импульсной ступенчатой функцией, но и другими быстропротекающими периодическими функциями времени.

Обратимся к расчетной схеме поверхностных слоев балки (см. рис. 4), где балка-полоска представлена тонкой прослойкой на упругом Винклеровском основании с коэффициентом отпора  $\beta$ , и нагружена касательными усилиями (кусочно-линейными)  $T$ , в местах образования деформационных микронеровностей, отстоящих друг от друга с шагом  $2\lambda$ . При этом в уравнение движения балки-полоски включены силы инерции балки, а также вертикальные реакции упругого основания.

Принимаем, что касательная нагрузка (импульсная) приложена к балке-полоске внезапно, то есть в момент исходного равновесия балки, продольные усилия не учитываем при определении собственной частоты колебаний упругой системы. Эта нагрузка (импульсная) будет учтена в виде внешней нагрузки.

При таких предпосылках запишем уравнение равновесия балки из поверхностных слоев полосы по аналогии с формулой (1)



$$E_c I \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \beta y + T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0. \quad (74)$$

Решение (74) ищем в виде:

$$y(x, t) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} z_k(t) \cdot \sin \frac{\pi k x}{2l}. \quad (75)$$

После подстановки (75) в (74) получим

$$E_c I \left(\frac{\pi k}{l}\right)^4 \cdot z_k(t) + m_0 \cdot \ddot{z}_k(t) + \beta \cdot z_k(t) + T \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \cdot z_k(t) = 0, \quad (76)$$

В выражении (76)  $T$  – продольная сжимающая сила, которая внезапно прикладывается к деформационной микронеровности, то есть при  $t = 0$ ,  $T = 0$ .

Введем следующие обозначения:

$$F_k(t) = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \cdot T(t) - \text{обобщенная продольная сила (кусочно-линейная);}$$

$\omega_k^2 = \frac{E_c I}{m_0} \left(\frac{\pi k}{l}\right)^4 + \frac{\beta}{m_0}$  – квадраты собственных частот свободных колебаний незагруженной балки-полоски.

С учетом обозначений получим

$$\ddot{z}_k + \omega_k^2 \cdot z_k = \frac{1}{m_0} \cdot F_k(t), \quad (77)$$

так как функция  $F_k(t)$  характеризует импульсное воздействие на микронеровности, то для решения уравнения (77) удобно применить методы операционного исчисления [8]. От уравнения (77) перейдем к его изображению (где  $S$  – некоторый комплексный параметр)

$$(S^2 + \omega_k^2) \cdot \bar{z}_k(S) = z_{k0} \cdot S + \dot{z}_{k0} + \frac{1}{m_0} \cdot \bar{F}_k(t), \quad (78)$$

Тогда решение уравнения в изображениях будет иметь вид

$$\bar{z}_k(S) = z_{k0} \cdot \frac{S}{S^2 + \omega_k^2} + \frac{\dot{z}_{k0}}{S^2 + \omega_k^2} + \frac{1}{m_0(S^2 + \omega_k^2)} \cdot \bar{F}_k(t), \quad (79)$$

Далее переходим к оригиналу  $\bar{z}_k(S) \rightarrow z_k(t)$ , тогда получим

$$z_k(t) = z_{k0} \cdot \cos \omega_k t + \frac{\dot{z}_{k0}}{\omega_k} \cdot \sin \omega_k t + \frac{1}{m_0 \omega_k} \cdot \int_0^t F_k(\tau) \cdot \sin \omega_k(t - \tau) d\tau, \quad (80)$$

Интеграл в (80) от произведения двух функций является сверткой этих функций.

Для функции, составленной из периодически повторяющихся импульсов  $F_k(t)$  необходимо получить периодические решения из подобранных начальных условий (двух дополнительных условий периодичности)

$$z_{k0} = z_k(0); \dot{z}_{k0} = \dot{z}_k(0). \quad (81)$$

Используя правило отыскания изображений для периодической функции « $\delta$ » – функции [8], запишем выражения для этих величин, так как

$$F_k(t) = F_k[\delta(t) - \delta(t - t_1)], \quad (82)$$



то

$$\bar{F}_k(S) = \frac{F_k(1-e^{-St_1})}{S(1-e^{-S\Theta})}, \quad (83)$$

Тогда изображение решения  $\bar{z}_k(S)$  имеет вид

$$\bar{z}_k(S) = \frac{Sz_{k0} + \dot{z}_{k0}}{S^2 + \omega_k^2} + \frac{F_k(1-e^{-St_1})}{m_0 S(1-e^{-S\Theta})(S^2 + \omega_k^2)}. \quad (84)$$

Переходя от изображения функции  $\bar{z}_k(S)$  к оригиналу  $z_k(t)$  получим решение в пределах одного периода  $0 \leq t \leq \Theta$

$$z_k(t) = z_{k0} \cdot \cos \omega_k t + \dot{z}_{k0} \cdot \frac{1}{\omega_k} \cdot \sin \omega_k t + \frac{(\pi k)^2}{m_0 \omega_k^2 l^2} \cdot T[\cos \omega_k(t - t_1) - \cos \omega_k t]. \quad (85)$$

Если пренебречь переходным режимом при колебаниях, то есть считать начальные условия нулевыми, то получим

$$z_k(t) = \frac{\pi^2 k^2 T [\cos \omega_k(t - t_1) - \cos \omega_k t]}{m_0 l^2 \left[ E_c I \left( \frac{\pi k}{l} \right)^4 + \beta \right]}. \quad (86)$$

Обращаясь к решению (76) или (77) в виде (85) и начальным условиям в интервале изменения  $z_k(t)$  от  $t = 0$  до  $t = \Theta$ , то есть значения функции в начале и конце интервала, исходя из условий периодичности должны совпадать:

$$z_{0k} = \frac{\pi^2 k^2 T [1 - \cos \omega_k \Theta + \cos \omega_k(\Theta - t_1) - \cos \omega_k t_1]}{2l^2 \left[ E_c I \left( \frac{\pi k}{l} \right)^4 + \beta \right] (1 - \cos \omega_k \Theta)}, \quad (87)$$

$$\dot{z}_{0k} = \frac{\pi^2 k^2 T [\sin \omega_k \Theta - \sin \omega_k(\Theta - t_1) - \sin \omega_k t_1]}{2l^2 \left[ E_c I \left( \frac{\pi k}{l} \right)^4 + \beta \right] (1 - \cos \omega_k \Theta)}. \quad (88)$$

С учетом начальных условий (87), (88) периодическое решение (85) примет вид

$$z_k(t) = \frac{\pi^2 k^2 T \cdot \sin \omega_k \frac{t_1}{2}}{l^2 \left[ E_c I \left( \frac{\pi k}{l} \right)^4 + \beta \right]} \cdot \left[ \frac{\cos \omega_k \left( t + \frac{\Theta - t_1}{2} \right)}{\sin \omega_k \frac{\Theta}{2}} + 2 \cdot \sin \omega_k \left( t - \frac{t_1}{2} \right) \right]. \quad (89)$$

В соответствие с формулой (89) найдем прогиб поверхностных слоев при их продольном изгибе, под действием касательных сил, обусловленных весом штампа и характеристикой трения между полосой и штампом ( $N = fP$ )

$$y(x, t) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\pi^2 k^2 T \cdot \sin \omega_k \frac{t_1}{2}}{l^2 \left[ E_c I \left( \frac{\pi k}{l} \right)^4 + \beta \right]} \cdot \left[ \frac{\cos \omega_k \left( t + \frac{\Theta - t_1}{2} \right)}{\sin \omega_k \frac{\Theta}{2}} + 2 \cdot \sin \omega_k \left( t - \frac{t_1}{2} \right) \right] \cdot \sin \frac{\pi k x}{2l}. \quad (90)$$

При пластическом деформировании тонких поверхностных слоев взаимодействующих деталей наблюдаются их деформационные смещения, причем эти величины зависят от режимов взаимодействия, продолжительности периодов нагружения, условий проскальзывания и др.

В ряде экспериментов определена степень пластичности деформированных взаимодействующих деталей [2]. Это говорит о том, что имеет место не упругое, а пластическое поведение материалов в тонких поверхностных слоях. В виду



скоротечности деформационных процессов, учесть течение материалов (при ползучести) за короткие промежутки времени не представляется возможным. Реально возможно учесть изменяющиеся модули упругости штампа и полосы под влиянием высоких температур, для чего рекомендуется использовать приведенные модули упругости по теории Кармана или Шенли [2].

Как известно [11] в процессе трения и изнашивания контактирующих пар впереди движущегося штампа развивается деформационно-волновой процесс на балке-полоске. Волновая деформация проявляется в виде образования гофрированной поверхности на части полупространства, расположенной впереди движущегося штампа [11]. Как показывают эксперименты [11], поперечные сечения деформированных поверхностей представляют собой синусоиды или близкие к ним кривые. При этом более твердые кромки штампа, или расположенные на штампе поперечные микронеровности войдут в соприкосновение с соответствующими микронеровностями на полосе. Для определенности передняя (твердая) кромка штампа встречается последовательно с поперечными микронеровностями на полосе.

Взаимодействие кромки штампа с микронеровностями полосы происходит циклично с шагом, равным расстоянию между вершинами смежных микронеровностей  $2\lambda$ .

Мы отвлекаемся от особенностей взаимодействия полосы со штампом, то есть не учитываем возможности самовозбуждения колебаний под штампом и полосой, где источником возникновения фрикционных автоколебаний может быть переменный характер сил трения между элементами контактирующей пары. Вместе с тем, помимо характеристики трения имеется другой источник для импульсного нагружения деформационных микронеровностей, которым является трансформированная кинетическая энергия движущегося штампа в циклично повторяющиеся импульсы касательных усилий за время воздействия на вершины деформационных микронеровностей. Этот импульсный процесс приводит к прохождению ударных волн по полосе и самой детали (при их значительной протяженности для линейной формы детали, или бесконечной протяженности для круглой или кольцевой детали). Поэтому процесс прохождения ударных волн будет сопровождать весь рабочий цикл взаимодействия данной пары. Причем через период очередная микронеровность будет взаимодействовать со штампом. В этом случае первая волна может пройти один или несколько циклов по полосе и встретится со второй волной и далее



встретится с последующими волнами и так далее. Другими словами, возникающий деформационно-волновой процесс, который происходит за счет сжатия поверхностных слоев деталей впереди штампа (а лучше сказать их сдвига), в моменты внезапного приложения нагрузок с коэффициентом динамичности ( $k = 2$ ), при дальнейшем прохождении штампа по образовавшимся микронеровностям, вызывает импульсное взаимодействие с микронеровностями, что приводит к непрерывному прохождению фронтов продольных волн (в том числе и звукового спектра) в пределах балки-полоски и самой детали в целом. Таким образом, если абстрагироваться от четырех общепризнанных теорий трения и изнашивания [5], и рассматривать только деформационно-волновую и ударно-волновую теорию, которые проявляются при любых взаимодействиях контактирующих деталей. Так, вначале проявляется аспект деформационно-волновой теории, обуславливающей проявление ударно-волновой теории, причем эти процессы имеют место как при статических так и динамических фрикционных взаимодействиях кинематических пар. Поэтому, в данном случае, нет необходимости в наличии ударных механизмов и других деталей, взаимодействующих при ударных нагрузках. Таким образом, ударно-волновая теория трения и изнашивания имеют более общий характер (и более широкое применение) чем это было анонсировано в [8].

Важной особенностью при рассмотрении аспектов проявления ударно-волновой теории являются следующие моменты – при взаимодействии деталей механическая энергия их движения трансформируется в тепловую, которая при рассеивании вызывает их нагрев и изменение физических свойств, таких как модуль упругости, предел прочности, предел текучести, предел выносливости.

Материалы трущейся пары переходят в упруго-пластическое или упруго-вязкое состояние, при этом материал на площадке контакта между штампом и полосой и впереди площадки контакта становится более пластичным и легче подвергается деформациям, которые могут быть остаточными. Заметим, что при незначительном количестве циклов нагружения полосы штампом или полосы роликом (или двух взаимодействующих роликов) будет наблюдаться выраженный эффект местного упрочнения, такой как при выполнении технологических операций холодная прокатка, накатка, волочение, обработка дробью или других аналогичных методах поверхностного упрочнения [10, 11]. Когда же количество циклов нагружения пары будет достаточно большим и при



этом возникнет перенаклеп взаимодействующих поверхностей, то на этих поверхностях возникают «заметные» волны деформации, и их эффект будет ярко выражен, который проявляется в усталостном деформационном износе с образованием гофрированных поверхностей на участках взаимодействия деталей [11]. В процессе рассмотрения продольной устойчивости поверхностных слоев деталей была принята расчетная схема шарнирно опертой балки на упругом основании, которая прогибается по двум (или трем) полуволнам. При такой постановке задачи наблюдается циклический (поперечный) процесс нагружения поверхностных слоев.

В силу несоответствия поперечных деформаций поверхностных и подповерхностных слоев детали при большом количестве циклов нагружения наблюдается снижение поддерживающего эффекта упругого основания, по аналогии с задачей о внезапном приложении нагрузки к стержню освобожденному от поперечных реакций [4], в нашем случае для балки-полоски при устранении эффекта упругого основания. Поэтому прогибы поверхностных слоев деталей будут возрастать в связи со снижением механических характеристик поверхностных и подповерхностных слоев при местном нагреве и снижения эффективности упругого основания. Таким образом, поверхностные слои деталей после получения определенного количества циклических нагружений теряет продольную устойчивость уже при меньших продольных нагрузках  $T_c < T_{кр}$ .

Оценим изменение амплитуд деформационных волн исходя из соотношений (21), (23).

Используя формулы для  $l_1$  и  $l_2$  [1, 10] получим

$$A^0 = \frac{2}{k\pi} \cdot \sqrt{\frac{fPl_1 k \cdot \sqrt[3]{E_c l}}{\sqrt{P \cdot E_c} \cdot \sqrt[3]{E}}} = \frac{2}{\sqrt{k}\pi} \cdot \sqrt{\frac{f \cdot \sqrt{P \sigma_m} \cdot l_1}{E_c} \cdot \sqrt[3]{\frac{E_c l}{E}}}. \quad (91)$$

Из анализа формулы (91) для определения амплитуд деформационных волн следует, что амплитуды возрастают пропорционально корню четвертой степени из вертикальной нагрузки  $P$  и пределу текучести  $\sigma_m$  материала балки-полоски, а также корню квадратному из толщины балки-полоски  $h$  и коэффициента трения скольжения между взаимодействующими деталями  $f$ . При этом амплитуда деформации поверхностных слоев обратно пропорциональны корню квадратному из модуля упругости материала этих слоев  $E_c$  (в результате нанесения покрытия или поверхностного упрочнения), которой уменьшается на



15 ÷ 25% и более при температурной вспышке в результате рассеивания механической энергии в процессе взаимодействия контактирующей пары (имеет место более плавное возрастание амплитуды микронеровностей). Кроме того, амплитуды деформационных микронеровностей скачкообразно возрастут при «перескоке» деформации упругой линии балки-полоски с двух полуволн ( $k = 2$ ) на одну полуволну ( $k = 1$ ), в момент отрыва поверхностных слоев от упругого основания и начинающегося при этом разрушения балки-полоски в связи с нарушением упругого контакта с подповерхностными слоями ( $E$ ).

В формуле (91) для определения амплитуд деформационной волны был принят статический вариант нагружения ( $V = 0$ ). Если рассматривать движения штампа со скоростью  $V \neq 0$ , то динамическое усилие

$$T_d = (fP + mV^2), \quad (92)$$

или

$$T_d = \left(1 + \frac{mV^2}{fP}\right) \cdot T_c. \quad (93)$$

Исходя из этих соображений динамические амплитуды деформационных волн можно представить в виде

$$A_0^d = \frac{2}{k\pi} \cdot \sqrt{\frac{(fP + mV^2)l_1 l_2}{E_c h}} = \frac{2}{\sqrt{k}\pi} \cdot \sqrt{(fP + mV^2)l_1} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_m}{P}} \cdot \sqrt[3]{\frac{E_c I}{E}}, \quad (94)$$

где  $k$  – число полуволн деформации на участке балки длиной  $l_2$ .

При ограниченных скоростях скольжения « $V$ » и малой погонной массе поверхностных слоев (для тонких покрытий) « $m_0$ » значения амплитуды деформации поверхностных слоев будут возрастать незначительно ( $A^o$ ,  $A^d$ ).

Вместе с тем, если влияние удвоенной кинетической энергии элемента погонной массы поверхностного слоя будут удовлетворять неравенству  $m_0 V^2 \gg fP$ , то амплитуды волн деформации будут расти практически пропорционально росту скорости перемещения штампа.

Также для оценки снижения несущей способности скоростной кинематической пары необходимо сравнивать величины действующих усилий в выражениях (91), (94) с выражениями для критической силы  $T_{кр}^{\exists}$  (или  $T_{кр}^d$ , результаты расчетов будут достоверными, если  $T_c < T_{кр}^{\exists} < T_{кр}^d$ ).

Преобразуем выражение для критической силы  $T_{кр}^{d*}$  (16) с учетом значений  $I$ ,  $l_2$ ,  $r$ ,  $\alpha$  к виду:





$$T_{\text{кр}}^{D^*} = E_c I \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{E}{4E_c I}\right)^2} + \frac{E}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{4E_c I}{E}}. \quad (95)$$

В результате дальнейших преобразований получим

$$T_{\text{кр}}^{D^*} = \frac{3}{4} \cdot E \cdot \sqrt[3]{\frac{4E_c I}{E}}. \quad (96)$$

Так как  $I = \frac{bh^3}{12}$ , то критическая сила  $T_{\text{кр}}^{D^*}$  может быть выражена через толщину уплотненного слоя  $h$ . Если величина  $h$  определена ориентировочно, то выразим значение  $h$  через вертикальную нагрузку на штамп  $P$ , предел текучести материала слоя  $\sigma_m$  (при этом  $b$  – ширина балки-полоски, принимаем  $b = 1$ )

$$T_{\text{кр}}^{D^*} = \frac{3}{4} \cdot E h \cdot \sqrt[3]{\frac{E_c b}{3E}} = \frac{3}{4} \cdot E \cdot \sqrt{\frac{P}{\sigma_m}} \cdot \sqrt[3]{\frac{E_c b}{3E}}. \quad (97)$$

Из учета влияния упругих свойств балки-полоски и отпора упругого Винклеровского основания вклад в общую устойчивость поверхностных слоев будет в два раза больше у упругого основания чем от упругого влияния самой балки. Следовательно при снижении отпора упругого основания продольная устойчивость балки-полоски может быть уменьшена в пределах до 66%.

Если следовать зависимости (17), то выражение для критической силы по Эйлеру примет вид:

$$T_{\text{кр}}^{\exists^*} = \frac{3}{4} \cdot E h \cdot \sqrt[3]{\frac{E_c b}{3E}} - m_0 V^2. \quad (98)$$

Как видно из выражения (98) при снижении жесткости упругой связи основания с поверхностными слоями и увеличением скорости движения штампа, значение  $T_{\text{кр}}^{\exists^*}$  может существенно снизиться.

Отметим, что вычисления величин  $A^o$ ,  $A^D$ ,  $T_{\text{кр}}^{\exists^*}$  необходимо производить с учетом значений приведенных модулей упругости по Карману –  $E^*$  или Шенли –  $E^{**}$  [2].

Также отметим, что величина  $l_1$  в формулах (91), (94) принимается равной длине плоского штампа, если штамп представляет собой цилиндрический ролик, то длина его площади контакта согласно [12] находится в пределах

$$2 \cdot \sqrt{\frac{2(1-\mu^2)PR}{\pi E_c}} \cdot \frac{\beta}{\alpha} \leq l_1 \leq 2 \cdot \sqrt{\frac{2(1-\mu^2)PR}{\pi E_c}}, \quad (99)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$  – реологические параметры балки-полоски ( $\alpha > \beta$ );  $R$  – радиус ролика;  $\mu$  – коэффициент Пуассона.

Если в процессе трения произойдет саморазогрев деталей, то проявляется вязкоупругие свойства материалов этих деталей.



При этом величина приведенного модуля уменьшится, а длина площади контакта  $l_1$  для ролика возрастет.

С целью получения достоверных результатов при определении амплитуд деформационных волн необходимо, чтобы касательная нагрузка в формулах (91), (94) не превышала критической силы по Эйлеру  $T_{кр}^{\text{Э}^*}$ .

Тогда изгибные деформации балки-полоски будут докритическими, и поэтому они будут прогнозируемыми, так как материал балки полоски в этом случае следует закону Гука.

Перейдем к дальнейшему обоснованию ударно-волновой теории трения и изнашивания. Как следует из работы [9] и других более ранних работ автора (совместно с авторским коллективом), эти исследования проводились на ударных машинах, таких как перфораторы и пневмоударники, с высокой частотой импульсного воздействия, которая составляет для машин первой группы  $\tau_1 > 60$  1/мин, и для машин второй группы  $\tau_2 > 1000$  1/мин. При этом исследователями установлено, что процесс работы бурильной машины сопровождается непрерывным прохождением ударных волн через ударный механизм и корпус машины, со скоростью

$$a = \sqrt{\frac{E_c}{\rho}}, \quad (100)$$

(где  $\rho$  – плотность материала поверхностных слоев балки-полоски).

Отметим, что во время движения поршня ударного механизма с частотами  $\tau_1, \tau_2$  (или другими их значениями), на боковых поверхностях соприкасающихся деталей образуются деформационные волны, периодичность повторения которых соответствует шагу расположения кольцевых микронеровностей, отнесенному к линейной скорости подвижной детали.

Учитывая то, что линейные скорости перемещения поршня бурильной машины могут быть очень высокими, а в ряде случаев совпадать со скоростями перемещения фронта ударных волн, то, чем ближе по величине окажутся скорости этих волновых процессов, тем ближе эти процессы будут находиться к состоянию волнового резонанса.

Таким образом, при трении и изнашивании подвижных соединений, впереди движущейся детали развиваются деформационные микронеровности, которые тут же могут разрушиться, в случае возникновения значительных деформаций этих микронеровностей. Если такого разрушения не произошло, то движущийся навстречу этим микронеровностям штамп выполаживает или



срезает их вершины.

В работе установлено, что при трении и изнашивании совместно проявляются эффекты как деформационно-волновой так и ударно-волновой гипотез трения и изнашивания.

## **Выводы**

1. Рассматривая задачу о взаимодействии двух подвижных деталей под влиянием «бегущих» касательных нагрузок установлено, что в некоторых диапазоне изменения скорости взаимодействия деталей их деформации возрастают пропорционально этой скорости взаимодействия.

2. В работе установлено, что значительное возрастание прогибов полосы под штампом (грузом) имеет место тогда, когда скорость передвижения вертикальной и касательной нагрузок (веса штампа и силы трения) приближается к скорости перемещения фронта ударных упругих волн.

3. Авторами показано, что перемещение подвижной детали вызывает впереди нее непрерывной волновой процесс, обусловленный проявлением деформации «стесненный» сдвиг в зоне, опережающей пятно контакта деталей.

Этот волновой процесс представляет проявление деформационно-волновой теории при трении и изнашивании.

4. Базируясь на проявлении деформационно-волновых процессов при трении и изнашивании заключаем, что образовавшиеся деформационные микронеровности являются периодически действующими препятствиями для движущегося штампа. При встрече штампа и деформационных микронеровностей происходит ударное взаимодействие, которое распространяется вдоль протяженной детали, вызывает непрерывный ударно-волновой процесс, сопровождающийся целый гаммой ударно-волновых взаимодействий, что подтверждает проявление ударно-волновых процессов при любых видах взаимодействия подвижных деталей.

5. В настоящей публикации показана, что при трении и изнашивании деталей имеет место проявление как деформационно-волновой, так и ударно-волновой теории трения и изнашивания. При этом многие положения других теорий трения и изнашивания могут быть объяснены с позиций деформационной и ударно-волновой теорий трения и изнашивания.