

КАПИТЕЛ 1 / CHAPTER 1¹

PRACTICAL APPLICATION OF DISPERSION AND REGRESSION ANALYSIS FOR ASSESSING THE INFLUENCE OF FACTORS ON THE SENSITIVITY OF THE CAPACITIVE HUMIDITY SENSOR

DOI: 10.30890/2709-2313.2024-26-00-003

Вступ

Сучасне виробництво потребує точного та якісного виконання технології виробництва і широкого застосування автоматизації виробничих процесів. Ефективність засобів технічної діагностики, приладів контролю, систем перевірки якості продукції, контролю параметрів довкілля тощо, передусім, залежить від якості первинних перетворювачів, які є основними чутливими органами вимірювальної апаратури. Важливою різновидністю яких є сенсори вологості. Від конструктивного рішення вологочутливих елементів, принципу їх дії та технології виготовлення суттєво залежить технічний рівень сенсорних систем [1–7]. Якість управління яких значно зростає при застосуванні математичної статистики як інструменту дослідницької роботи. Розроблення нових вологочутливих елементів або вдосконалення існуючих потребує проведення великої кількості експериментальних досліджень. При проведенні експерименту одержують безліч даних, які потрібно структурувати та інтерпретувати для використання під час прийняття ефективних рішень стосовно структури та параметрів як вологочутливих елементів, так і вимірювальних систем. Для того, щоб правильно інтерпретувати отримані вихідні дані, потрібно планувати проведення експериментів. В теорії планування експерименту виділяють тактичне та стратегічне планування. Тактичне планування допомагає визначити умови проведення одного експерименту, а стратегічне планування – серії експериментів. Стратегічне планування факторних експериментів передбачає застосування як регресійного аналізу, так і дисперсійного аналізу. Саме проблематика цих питань розглядається в цьому розділі [8–20].

¹Authors: Krylik Lyudmila Viktorivna



1.1. Основні аспекти планування експерименту в науковій та дослідній практиці

В наукових дослідженнях вагоме значення належить експерименту, який проводиться або на виробництві, або в лабораторіях, або на дослідних ділянках тощо. Важливим є питання, наскільки ефективно він проводиться.

Для виконання експерименту спочатку потрібно вибрати об'єкт дослідження та визначати програму дій, яку називають плануванням експерименту. Взагалі метою будь-якого експерименту є цілеспрямований вплив на об'єкт дослідження для отримання достовірної інформації. Існують такі різновиди експерименту: фізичний, психологічний та модельний. Натепер з фізичними моделями все більшого поширення отримали абстрактні математичні моделі. Планування експерименту безпосередньо пов'язане з розробкою та дослідженням математичної моделі об'єкта дослідження.

Для формулювання задачі планування експерименту потрібно вибрати тип моделі досліджуваного об'єкту. Нині перевага надається моделі «чорної скриньки», яку доцільно застосувати у випадку складного досліджуваного об'єкту та множині факторів впливу з яких потрібно вибрати значущі фактори впливу на досліджуваний об'єкт.

Схематично модель «чорної скриньки» подана на рисунку 1.

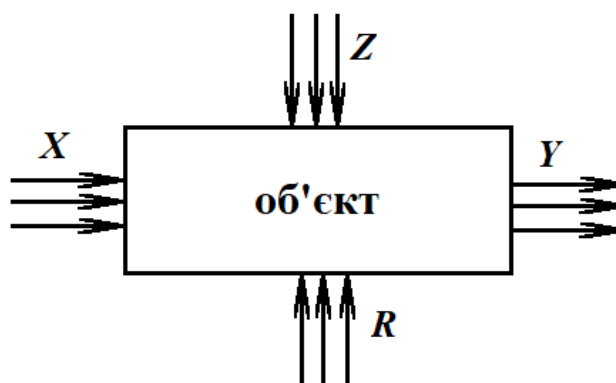


Рисунок 1 – Схема «чорної скриньки»

Входами «чорної скриньки» є вектор незалежних змінних X (фактори впливу), виходами — вектор параметрів Y , що характеризують об'єкт



дослідження (відгук моделі). У технічній літературі зустрічаються інші назви цього параметра, а саме: критерій оптимізації, цільова функція, вихід «чорної скриньки». На об'єкт дослідження також діють некеровані фактори Z , які є незалежними змінними (їх можна тільки виміряти), а також – вектор неконтрольованих факторів R , який впливає на об'єкт дослідження, але не підлягає вимірюванню [20–22].

Зауважимо, модель «чорної скриньки» сприяє побудові математичної моделі досліджуваного об'єкта. Математичною моделлю є рівняння, яке показує зв'язок параметра оптимізації з факторами:

$$y = f(X_1, X_2, \dots, X_n) + \varepsilon,$$

де y – відгук об'єкта дослідження;

X_i – фактори впливу на об'єкт дослідження;

ε – випадкова похибка.

Наступним етапом є вибір *параметрів оптимізації* (критеріїв оптимізації). Вибір параметра оптимізації є одним із головних етапів роботи на стадії попереднього вивчення об'єкта дослідження. Оскільки від коректного вибору параметра оптимізації (функції цілі) залежить коректне формулювання задачі дослідження.

Параметр оптимізації є реакцією (відгуком) впливу факторів, які визначають поведінку об'єкта дослідження і мають кількісне значення.

Зазвичай реальні об'єкти і процеси мають складну природу. Ця обставина вимагає одночасного врахування багатьох параметрів, тобто будь-який об'єкт може характеризуватись або сукупністю параметрів, або підмножиною цієї сукупності, або єдиним параметром оптимізації. В останньому випадку інші характеристики процесу слугують обмеженнями і не мають статусу параметра оптимізації [20–22].

Після того як обрано *об'єкт дослідження* та *критерій оптимізації*, потрібно розглянути всі *фактори впливу* на процес дослідження. Факторами в теорії планування експериментів називають вхідні змінні, вплив яких досліджується на вихідну змінну, тобто на *відгук моделі*.



Фактори впливу мають задовольняти таким вимогам: керованість, тобто обране потрібне значення фактора можна підтримувати постійним протягом експерименту; висока точність вимірювання, яка визначається діапазоном зміни факторів; однозначність; сумісність, тобто всі їхні комбінації здійсненні та безпечні; незалежність, тобто можливість встановлення фактора на будь-якому рівні незалежно від рівнів інших факторів. За своєю природою фактори поділяються на кількісні та якісні. До кількісних відносяться ті фактори, які можна вимірювати, зважувати тощо. Кількісний фактор може неперервно змінюватись в заданому інтервалі. Фактори, які не характеризуються цифровими значеннями називаються *якісними*.

Фактори мають область визначення, яка може бути безперервною або дискретною. Зазвичай значення факторів приймаються дискретними, це пов'язано з рівнями факторів. *Рівнями* називають кількісні або якісні значення фактора, при яких можливе проведення експерименту.

Крім того, фактори мають різні значення за величиною. Потрібно зважити на те, що значення факторів в плануванні експерименту виражають у кодованих величинах. Тому потрібно перейти від натуральних значень вхідних факторів до кодованих (рисунок 2).

При виборі області визначення факторів особливу увагу приділяють вибору нульової точки, тобто нульового (основного) рівня. Вибір нульової точки еквівалентний визначенню вихідного стану об'єкта дослідження. Оптимізація пов'язана з покращенням стану об'єкта порівняно зі станом у нульовій точці. Пошук раціональних рішень прискорюється тоді, коли ця точка знаходиться в області оптимуму або якомога ближче до неї.

Після встановлення нульової точки вибирають інтервали варіювання факторів. Це пов'язано з визначенням таких значень факторів, які в кодованих величинах відповідають $+1$ та -1 . Інтервали варіювання вибирають з урахуванням того, що значення факторів, які відповідають рівням $+1$ і -1 мають суттєво відрізнитись від значення нульового рівня. Тому у всіх випадках величина інтервалу варіювання має бути більше подвоєної квадратичної

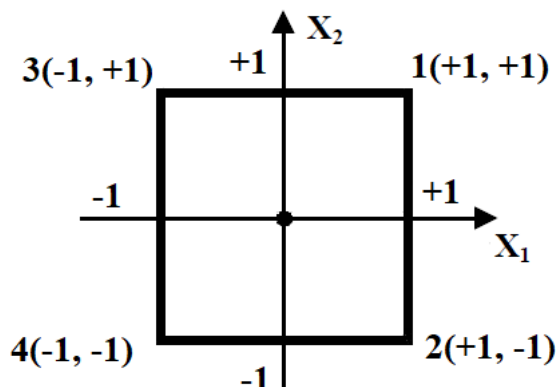


Рисунок 2 – Розташування експериментальних точок у факторному просторі для двох факторів в кодованих величинах

помилки фіксування цього фактора. Крім того, небажано надмірно збільшувати величини інтервалів варіювання, це може призвести до зниження ефективності пошуку оптимуму. Дуже малий інтервал варіювання зменшує область експерименту, це уповільнює пошук оптимуму.

При виборі інтервалу варіювання доцільно враховувати число рівнів варіювання факторів. Потрібно зауважити, що обсяг експерименту та ефективність оптимізації залежать від кількості рівнів факторів, а також від кількості факторів [20–22]:

$$N = q^k,$$

де N – кількість дослідів;

q – кількість рівнів факторів;

k – кількість факторів.

На першому етапі роботи використовують два рівня фактора, тобто верхній та нижній рівні, які в кодованих координатах позначаються як +1 та -1. Це відповідає припущенню про лінійну залежність відгуку моделі від факторів.

Для побудови моделей другого порядку така кількість рівнів недостатня. Збільшення числа рівнів фактора підвищує чутливість експерименту, але одночасно зростає кількість дослідів.



Реальні об'єкти складні за своєю природою. Наприклад, для двох факторів кількість експериментів дорівнює $2^2 = 4$, для трьох факторів кількість експериментів – $2^3 = 8$. Для системи з чотирма факторами на чотирьох рівнях потрібно провести 256 експериментів, а для дев'яти факторів на трьох рівнях – 729 експериментів. Однак неможливо виконати всі експерименти, щоб вирішити поставлену задачу.

В цьому випадку доцільно застосувати планування експерименту. Теорія планування експерименту займається проблемами одержання найбільшої кількості інформації про реальний об'єкт при мінімальних затратах як комп'ютерного часу так і часу дослідника. А спеціальні засоби планування експериментів дозволяють скласти ефективний план проведення експериментів, що забезпечує збір потрібної інформації для отримання обґрунтованих висновків при мінімальних затратах. До найпоширеніших методів планування експерименту відносять повний факторний експеримент (ПФЕ) та дробовий факторний експеримент (ДФЕ) першого порядку [20–23].

Крім того, плани експериментів поділяють на однофакторні та багатофакторні. На відмінну від *однофакторних* планів експериментів, які досліджують тільки вплив одного фактора на відгук моделі, *багатофакторні* плани експериментів будують з урахуванням сумісного впливу факторів на відгук моделі. Такі плани дозволяють досліджувати вплив як кожного фактора, так і вплив взаємодій різних факторів. Тобто, застосування багатофакторних планів сприяє детальному аналізу проведеного експерименту, а саме дає змогу визначити значення використовуваних факторів, а також їх вплив на характеристики та поведінку досліджуваного об'єкта, процесу.

Взагалі план експерименту вказує розташування дослідних точок в n -вимірному просторі незалежних змінних. Найчастіше план експерименту задається в вигляді матриці планування – прямокутної таблиці, кожний рядок якої відповідає умовам певного дослідження, а стовпці – значенням однієї з незалежних змінних в різних дослідженнях.



Розглянемо розроблення плану експерименту якщо є два фактора впливу ($k = 2$) на об'єкт дослідження і кожний фактор має два рівня ($q = 2$). Кількість рядків матриці планування дорівнює кількості стовпців і дорівнює 2^k . Перший стовпець матриці відповідає фіктивній змінній x_0 і всі значення його дорівнюють $+1$. Наступний стовпець відповідає фактору x_1 , його заповнюють з чергуванням значень -1 і $+1$. Наступні за ним стовпці заповнюють, змінюючи кількість змін знаків вдвічі. Після цього заповнюють стовпці, що відповідають взаємодіям факторів, помножуючи стовпці заданих факторів. В n -му стовпці наводяться одержані в досліді значення залежної змінної (таблиця 1). За матрицею планування проводиться серія експериментів. Кожний рядок матриці планування відповідає окремому експерименту, проведеному при відповідних значеннях факторів.

Таблиця 1 – Матриця планування ПФЕ

2^2	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	y
1	+	-	-	+	y_0
2	+	+	-	-	y_1
3	+	-	+	-	y_2
4	+	+	+	+	y_3

Кожному стовпцю матриці планування відповідає доданок рівняння регресії, яке побудоване за результатами експериментів. Наприклад, плану факторного експерименту типу 2^2 відповідає рівняння регресії вигляду:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_1x_2,$$

а для плану факторного експерименту типу 2^3 рівняння регресії має такий вигляд:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_1x_2 + b_5x_1x_3 + b_6x_2x_3 + b_7x_1x_2x_3.$$

З наведених прикладів видно, що збільшення кількості факторів сприяє збільшенню розміру матриці планування та обсягу експерименту, а також збільшується кількість доданків в рівнянні регресії, що описують взаємодії факторів. Однак, експериментатора цікавлять тільки доданки, які описують



фактори впливу та ігноруються доданки рівняння регресії, що описують складні взаємодії факторів. За таких умов часто застосовуються *дробові факторні плани*, для яких характерне змішування статистичних оцінок.

Зазвичай експерименти є багатофакторними та сприяють оптимізації якості матеріалів, пошуку оптимальних умов проведення технологічних процесів, розробці найбільш раціональних конструкцій обладнання тощо. Системи, які є об'єктом таких досліджень складні за своєю природою, їх важко теоретично дослідити в прийнятні терміни. Тому, незважаючи на значний обсяг виконаних науково-дослідних робіт, через відсутність реальної можливості досить повно вивчити значну кількість об'єктів дослідження, багато рішень приймаються на підставі інформації, що має випадковий характер і не відповідає оптимальним. Отже, виникає потреба пошуку методів, які дозволять вести дослідницьку роботу прискореними темпами та забезпечують прийняття рішень, близьких до оптимальних. Проблематику цих питань вирішують статистичні методи планування експерименту, запропоновані в двадцятих роках англійським статистиком Рональдом Фішером. Рональд Фішер уперше показав доцільність одночасного варіювання всіма факторами на противагу широко поширеному однофакторному експерименту [20–22].

Застосування методів математичної статистики сприяє систематизації, обробці та аналізу результатів явищ, які спостерігаються. Статистичні моделі широко використовують для діагностики стану об'єктів дослідження, при вивченні причинно-наслідкового механізму та динаміки досліджуваних явищ і процесів, моніторингу кон'юнктури ринку, при прогнозуванні та прийнятті різного кола рішень. До найважливіших розділів математичної статистики відносять: статистичні ряди розподілу, оцінювання параметрів розподілу, закони розподілу вибірових характеристик, дисперсійний, регресійний, кореляційно-регресійний аналіз тощо.

Регресійний аналіз є вагомим інструментом у прийнятті ефективних рішень для вирішення різного кола завдань, а саме, він сприяє кількісному оцінюванню впливу факторів на відгук моделі, тобто забезпечує оптимізацію параметрів



фактора. Дисперсійний аналіз забезпечує якісне оцінювання впливу факторів на відгук моделі, тобто сприяє визначенню значущих факторів моделі. Ефективність яких зростає при застосуванні експериментів за багатофакторними планами. Нині методи математичної статистики широко застосовуються в різних сферах діяльності людини [9–19].

Практичне застосування дисперсійного та регресійного аналізів розглянуто в цьому розділі.

1.2. Особливості обробки експериментальних даних за допомогою дисперсійного та регресійного аналізів впливу факторів на відгук моделі

Регресійний аналіз та дисперсійний аналіз є сукупністю статистичних методів. Нині цей різновид статистичних методів широко застосовується в різноманітних галузях промислової індустрії [8–19]. Регресійний аналіз кількісно здійснює оцінювання впливу фактора на відгук моделі, тобто забезпечує оптимізацію параметрів фактора [9–15, 20]. Дисперсійний аналіз спрямований на визначення якісного впливу фактора на відгук моделі на рівні «впливає» або «не впливає», тобто дисперсійний аналіз сприяє визначенню значущих факторів моделі [11, 16–20]. Крім того, щоб проаналізувати експеримент всебічно і зробити статистично ґрунтовні висновки або знайти оптимальні рішення, доцільно застосовувати експерименти за багатофакторними планами з урахуванням сумісного впливу факторів [9–20].

Розглянемо це детальніше.

Основна ідея *дисперсійного аналізу* полягає в порівнянні факторної дисперсії, яка обумовлена впливом фактора та залишкової дисперсії, що обумовлена впливом випадкових причин. Якщо різниця між цими дисперсіями значна, то фактор здійснює вплив на відгук моделі y .



Для цього розраховують значення факторної дисперсії $S_{\text{факт}}$, залишкової дисперсії $S_{\text{залиш}}$ за такими формулами [20]:

$$S_{\text{факт}} = p \cdot \sum_{j=1}^2 (\bar{y}_j - \bar{y})^2, \quad (1)$$

$$S_{\text{залиш}} = \sum_{i=1}^p (y_{i1} - \bar{y}_1)^2 + \sum_{i=1}^p (y_{i2} - \bar{y}_2)^2 \quad (2)$$

де y_j – спостереження відгуку моделі в j -ому експерименті;

y_{i1} , y_{i2} – i -е спостереження відгуку моделі нижнього та верхнього рівня факторів.

Середні значення спостережень обчислюються за такими формулами [20]:

$$\bar{y}_j = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p y_{ij}, \quad \bar{y} = \sum_{j=1}^2 \bar{y}_j. \quad (3)$$

Факторна $d_{\text{факт}}$ та залишкова дисперсії $d_{\text{залиш}}$ з врахуванням кількості ступенів вільності обчислюються за формулами [20]:

$$d_{\text{факт}} = S_{\text{факт}}, \quad d_{\text{залиш}} = \frac{S_{\text{залиш}}}{2 \cdot (p - 1)}. \quad (4)$$

У формулах (4) в знаменнику виразу стоїть кількість ступенів вільності. Порівняння факторної та залишкової дисперсії, які спостерігаються в експерименті проводять за величиною критерію Фішера [20]:

$$F = \frac{d_{\text{факт}}}{d_{\text{залиш}}}. \quad (5)$$

Критичне значення критерію Фішера $F_{\text{кр}}$ знаходять на основі рівня значимості $\alpha = 0,05$, ступенів вільності чисельника $m_1 = N \cdot (p - 1)$ та ступенів вільності знаменника $m_2 = p - 1$.

Якщо $F > F_{\text{кр}}$, то середні \bar{y}_1 та \bar{y}_2 розрізняються значимо і вплив фактора є значущим. В протилежному випадку вплив фактора визнається не значущим, а різниця у середніх значеннях пояснюється випадковими причинами. Розрізняють однофакторний та багатфакторний дисперсійний аналіз. Однофакторний дисперсійний аналіз виконується для з'ясування впливу одного



фактора на відгук моделі (результат) у випадках, коли неможливо провести порівняльні спостереження вихідної величини при наявності фактора і без нього (контрольна група) та набрати відповідні статистичні дані. Крім того, на практиці виникає потреба дослідити вплив декількох факторів. Результат можна отримати, дослідивши вплив кожного фактора окремо. Однак кількість експериментів при такому підході швидко зростає зі збільшенням кількості факторів, щоб уникнути цього проводять експерименти за багатофакторними планами з урахуванням сумісного впливу факторів [20]. Такий багатофакторний план у випадку двох факторів має вигляд (таблиця 2):

Таблиця 2 – Багатофакторний план у випадку двох факторів

2^2	A_1	A_2	Дисперсійний аналіз	
			дисперсія	Кількість ступенів вільності
B_1	$y_1(A_1, B_1), \dots, y_4(A_1, B_1)$	$y_1(A_2, B_1), \dots, y_4(A_2, B_1)$	Фактор A	1
B_2	$y_1(A_1, B_2), \dots, y_4(A_1, B_2)$	$y_1(A_2, B_2), \dots, y_4(A_2, B_2)$	Фактор B	1
			Фактор AB залишкова	1 15-3=12
	$p = 8$	$N_{np} = 16$	загальна	16-1=15

де A і B – два фактори, вплив яких на відгук моделі y досліджується,

$y_k(A_i, B_j)$ – результат k -того спостереження на i -тому рівні фактора A та на j -тому рівні фактора B .

Загальне кількість прогонів в цьому плані $N_{np} = p \cdot 2 = 16$, а кількість повторень для кожного рівня $p = 8$.

Крім того, є можливість дослідження впливу взаємодії факторів A і B .

Верхній рівень фактору взаємодії AB визначається експериментами:

$$y_1(A_1, B_1), \dots, y_4(A_1, B_1), y_1(A_2, B_2), \dots, y_4(A_2, B_2).$$

Нижній рівень – експериментами:

$$y_1(A_1, B_2), \dots, y_4(A_1, B_2), y_1(A_2, B_1), \dots, y_4(A_2, B_1).$$



Потрібно зауважити, що дисперсійний аналіз впливу кожного фактора проводиться в такий же спосіб як і для одного фактора, тобто за формулами (1)–(5). Відрізняються тільки кількості ступенів вільності, що використовуються у формулах (4), (5) та при визначенні критерію Фішера. Для того, щоб не виникло помилок значення ступенів вільності подаються в плані.

Статистичну обробку результатів факторного експерименту проводять в декілька етапів. Спочатку виконують оцінку *відтворюваності* експерименту за критерієм Кохрена. Для цього розраховують значення дисперсії у кожному експерименті D_j , сумарне D_Σ та максимальне D_{\max} значення дисперсії за такими формулами [20]:

$$D_j = \frac{\sum_{i=1}^p (y_{ij} - y_j)^2}{p-1}, \quad (6)$$

де y_{ij} – i -е спостереження відгуку моделі в j -ому експерименті;

$$D_\Sigma = \sum_{j=1}^N D_j, \quad (7)$$

$$D_{\max} = \max_j D_j. \quad (8)$$

Потім обчислюють спостережуване значення критерію Кохрена:

$$G = \frac{D_{\max}}{D_\Sigma}. \quad (9)$$

Середні значення відгуку моделі обчислюють за такою формулою:

$$y_j = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p y_{ji}. \quad (10)$$

Спостережуване значення критерію Кохрена порівнюють з його табличним значенням $G_{кр}$, обчисленим при рівні значимості $\alpha = 0,05$, кількості експериментів N і кількості ступенів вільності $m = p - 1$. Якщо $G < G_{кр}$, то експеримент є відтворюваним,

За виразом (11) обчислюють оцінку дисперсії генеральної сукупності:



$$D = \frac{1}{N} \sum_j D_j, \quad (11)$$

Якщо $G > G_{кр}$, потрібно збільшити кількість прогонів або зменшити інтервал варіювання факторів (збільшити точність вимірювань).

Якщо експеримент є відтворюваним переходять до обчислення коефіцієнтів рівняння регресії, використовуючи формули:

$$b_0 = \frac{\sum y_i}{N}, \quad b_k = \frac{\sum y_i x_{ik}}{N}, \quad k = 1, \dots, N-1. \quad (12)$$

І виконують наступний етап статистичної обробки результатів. На цьому етапі оцінюють значущість коефіцієнтів рівняння регресії за критерієм Стьюдента. Спостережуване значення критерію Стьюдента знаходять за формулою:

$$t_j = |b_j| \sqrt{\frac{N \cdot p}{D}}, \quad (13)$$

Потім t_j порівнюють з табличним значенням $t_{кр}$, визначеним при рівні значимості $\alpha = 0,05$ та кількості ступенів вільності $m = N \cdot (p-1)$. Коефіцієнт b_j вважається значущим, якщо відповідне значення $t_j > t_{кр}$. Інші $N-L$ коефіцієнтів приймаються незначущими і виключаються з рівняння регресії.

Якщо всі коефіцієнти рівняння регресії виявились значущими, то наступний етап статистичної обробки результатів факторного експерименту не виконують. Вважають обробку результатів закінченою і переходять до розкодування рівняння регресії, використовуючи вирази [20]:

$$x_i = \frac{X_i - X_{i0}}{\Delta_i}, \quad (14)$$

$$\text{де } X_{i0} = \frac{X_{i\max} + X_{i\min}}{2}, \quad \Delta_i = \frac{X_{i\max} - X_{i\min}}{2}.$$

Якщо є незначущі коефіцієнти рівняння регресії, переходять до останнього етапу статистичної обробки результатів факторного експерименту. Перевіряють адекватність отриманого рівняння регресії результатам



експерименту за критерієм Фішера. Для цього розраховують дисперсію адекватності за формулою:

$$D_{ad} = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i^{екс} - y_i^{рег})^2}{N - L}, \quad (15)$$

де $y_i^{рег}$ – обчислене за регресійним рівнянням значення i -ого експерименту,
 L – кількість значущих коефіцієнтів лінійної регресії.

Спостережуване значення критерію Фішера визначають за формулою:

$$F = \frac{D_{ad}}{D}. \quad (16)$$

Якщо $F < F_{кр}$, то модель адекватна і переходять до розкодування рівняння регресії, використовуючи вирази (14).

Якщо $F > F_{кр}$, то модель не адекватна, і потрібно перейти до більш складної моделі (від дробового до повного плану або від лінійного до квадратичного рівняння) або зменшити інтервал варіювання факторів.

1.3. Визначення якісного та кількісного впливу факторів на чутливість ємнісного сенсора вологості одношарової структури

Експериментальними зразками слугували ємнісні сенсори вологості (м. Вінниця, Україна, ВНТУ), виготовлені на ситаловій підкладці розміром $0,7 \times 0,9$ см. На поверхні ситалової підкладки нанесена плівка міді, яка утворює обкладки ємнісних сенсорів вологості у вигляді меандру з відповідною геометрією $7,85 \cdot 10^{-2} \times 150 \cdot 10^{-6} \times 1,2 \cdot 10^{-6}$ м [6]. В такій конструкції вологочутливим шаром є гігроскопічна сіль, яка слугує діелектриком. Для створення вологочутливої плівки використовувались розчини гігроскопічної солі NaCl з концентраціями 0,89 моль/л та 5,33 моль/л, які наносились на поверхню ємнісних сенсорів вологості пульверизатором на відстані $40 \div 50$ см товщинами 5,0 мкм та 10,0 мкм.



Для оцінювання *якісного впливу* на чутливість ємнісного сенсора вологості одношарової структури таких факторів: товщина вологочутливого шару, концентрація розчину солі (гігроскопічна сіль NaCl) та сумісного впливу товщина вологочутливого шару та концентрація розчину солі, застосуємо *багатофакторний дисперсійний аналіз*.

Для розрахунків використано такі позначення: фактор A – товщина вологочутливого шару d , мкм; A_1 – нижній рівень фактора A ; A_2 – верхній рівень фактора A ; фактор B – концентрація розчину солі NaCl, яка виконує функцію адсорбуючого матеріалу C , моль/л; B_1 – нижній рівень фактора B ; B_2 – верхній рівень фактора B ; AB – сумісний вплив фактора A та фактора B ; відгук моделі y – чутливість ємнісного сенсора вологості S_C , пФ/%.

Потрібно провести оцінювання впливу факторів A , B та AB на чутливість ємнісного сенсора вологості одношарової структури за такими даними факторного експерименту (таблиця 3):

Таблиця 3 – Результати факторного експерименту

	$d = 5,0$ мкм	$d = 10,0$ мкм
$C = 0,89$ моль/л	5,2; 4,8; 6,7; 7,8	6,1; 5,0; 7,5; 8,4
$C = 5,33$ моль/л	10,1; 16,2; 25,3; 30,7	32,5; 28,1; 38,5; 49,0

Для кожного фактора маємо два рівня, отже $q = 2$ та вісім прогонів, тобто $p = 8$. Результати експериментів, які подано в таблиці 4 відповідають багатофакторному плану у випадку двох якісних факторів.

Оцінювання впливу факторів A , B та AB за багатофакторним дисперсійним аналізом у випадку двох якісних факторів будемо проводити за виразами (1) – (5). Результати обчислень за формулами (1) – (5) подано в таблиці 5.

Потрібно зауважити, що в знаменнику залишкової дисперсії (4) для багатофакторного плану у випадку двох якісних факторів кількість ступенів вільності дорівнює 12, а не 14, як в однофакторному дисперсійному аналізі.



Таблиця 4 – Результати багатofакторного плану у випадку двох якісних факторів

2^2	A_1	A_2	Дисперсійний аналіз	
			дисперсія	кількість ступенів вільності
B_1	5,2; 4,8; 6,7; 7,8	6,1; 5,0; 7,5; 8,4	фактор A	1
			фактор B	1
B_2	10,1; 16,2; 25;3; 30,7	32,5; 28,1; 38,5; 49,0	фактор AB	1
			залишкова	15-3=12
	$p = 8$	$N_{np} = 16$	загальна	16-1=15

Таблиця 5 – Результати оцінювання впливу факторів за дисперсійним аналізом

A		B		AB	
$\overline{y_{A_1}}$	13,35	$\overline{y_{B_1}}$	6,438	$\overline{y_{AB_1}}$	21,575
$\overline{y_{A_2}}$	21,888	$\overline{y_{B_2}}$	28,8	$\overline{y_{AB_2}}$	13,663
$\overline{y_A}$	17,619	$\overline{y_B}$	17,619	$\overline{y_{AB}}$	17,619
$S_{факт}$	291,58978	$S_{факт}$	2000,23618	$S_{факт}$	250,39898
$S_{залиш}$	2762,68875	$S_{залиш}$	1053,91875	$S_{залиш}$	2803,81375
$d_{факт}$	291,58978	$d_{факт}$	2000,23618	$d_{факт}$	250,39898
$d_{залиш}$	230,22406	$d_{залиш}$	87,82656	$d_{залиш}$	233,65115
F	1,27	F	22,77	F	1,07
$F_{кр}$	4,75	$F_{кр}$	4,75	$F_{кр}$	4,75

Результати досліджень отримано на основі порівняння факторної дисперсії, яка обумовлена впливом фактора та залишкової дисперсії, що обумовлена впливом випадкових причин. Порівняння факторної та залишкової дисперсії проводилось за величиною критерію Фішера. Отже, використовуючи багатofакторний дисперсійний аналіз доведено, що на відгук моделі, а саме на чутливість ємнісного сенсора вологості одношарової структури вагомий вплив має фактор B – концентрація розчину солі NaCl. В цьому випадку значення критерію Фішера, яке спостерігається в експерименті значно перевищує критичне значення критерію Фішера, а саме $22,77 > 4,75$ ($F > F_{кр}$). Вплив



факторів A , AB , а саме товщини вологочутливого шару та сумісного впливу товщини вологочутливого шару + концентрації розчину солі є несуттєвим, тобто різниця в значеннях відгуку моделі пов'язана з випадковим її характером і не пов'язана зі зміною значення фактора ($F < F_{кр}$). Результати оцінювання впливу факторів на чутливість ємнісного сенсора вологості одношарової структури за багатофакторним дисперсійним аналізом подано в таблиці 5.

Тепер застосуємо *регресійний аналіз* для визначення *кількісного впливу* на чутливість ємнісного сенсора вологості одношарової структури таких факторів: товщина вологочутливого шару та концентрація розчину солі.

Для проведення розрахунків приймемо такі позначення: фактор X_1 – товщина вологочутливого шару d , мкм; фактор X_2 – концентрація розчину солі NaCl, яка виконує функцію адсорбуючого матеріалу C , моль/л; відгук моделі y – чутливість ємнісного сенсора вологості S_C , пФ/% .

Тип експерименту – це число, яке дорівнює кількості експериментів в плані. Так, для двох факторів кількість експериментів буде $2^2 = 4$, тобто $N = 4$.

В таблиці 6 подано значення відгуку моделі y_{ij} , які отримані в результаті проведення повного факторного експерименту типу 2^2 при кількості прогонів $p = 3$.

Таблиця 6 – Результати повного факторного експерименту типу 2^2

X_1	X_2	y_{j1}	y_{j2}	y_{j3}
5,0	0,89	5,2	4,8	6,7
10,0	0,89	6,1	5,0	7,5
5,0	5,33	10,1	16,2	25,3
10,0	5,33	32,5	28,1	49,0

Перейдемо до статистичної обробки результатів факторного експерименту. На початку статистичної обробки виконують оцінку *відтворюваності* експерименту за критерієм Кохрена.



Спостережуване значення критерію Кохрена обчислимо за формулами (6)–(10) та отримаємо такі значення: максимальне значення дисперсії – $D_{\max} = 121,4$; сумарне значення дисперсії – $D_{\Sigma} = 182,48$; спостережуване значення критерію Кохрена – $G \approx 0,665$.

Перейдемо до визначення табличного значенням критерію Кохрена $G_{кр}$. При рівні значимості $\alpha = 0,05$, кількості ступенів вільності $m = p - 1 = 3 - 1 = 2$, маємо $G_{кр} = 0,768$. Оскільки $0,665 < 0,768$, тобто $G < G_{кр}$, то факторний експеримент є відтворюваним. За виразом (11) визначена оцінка дисперсії генеральної сукупності – $D = 45,62$.

Складемо матрицю планування повнофакторного експерименту (ПФЕ) (таблиця 7) та визначимо коефіцієнти рівняння регресії.

Таблиця 7 – Матриця планування ПФЕ

2^2	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	y_j
1	+	-	-	+	5,57
2	+	+	-	-	6,2
3	+	-	+	-	17,2
4	+	+	+	+	36,53

Плануванню факторного експерименту типу 2^2 відповідає рівняння регресії в загальному вигляді:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_1x_2.$$

Використовуючи дані матриці планування ПФЕ (таблиці 7), визначимо коефіцієнти рівняння регресії за формулами (12):

$$b_0 = 16,38; \quad b_1 = 4,99; \quad b_2 = 10,49; \quad b_3 = 4,68.$$

З врахуванням отриманих значень коефіцієнтів, рівняння регресії має вигляд:

$$y = 16,38 + 4,99x_1 + 10,49x_2 + 4,68x_1x_2. \quad (17)$$

Отже, аналізуючи отримане рівняння регресії, можна зробити висновок про те, що фактор x_2 спричиняє на відгук моделі набагато більший вплив,



ніж фактор x_1 або x_1x_2 . Тобто концентрація розчину солі NaCl, яка використовувалась для створення вологочутливого шару суттєво впливає на чутливість ємнісного сенсора вологості одношарової структури. Отримане рівняння регресії можна використовувати для наближених розрахунків відгуку моделі в області проведення експериментів.

Зважаючи на те, що експеримент є відтворюваним перейдемо до наступного етапу статистичної обробки результатів.

На цьому етапі оцінюють значущість коефіцієнтів рівняння регресії за критерієм Стюдента.

При рівні значимості $\alpha = 0,05$, числі ступенів вільності $m = N \cdot (p - 1) = 4 \cdot (3 - 1) = 8$, маємо табличне значення критерію Стюдента $t_{кр} = 2,31$.

Оцінюємо значущість коефіцієнтів b_j за формулою (13):

$$t_0 = 8,4 > t_{кр} = 2,31 \rightarrow b_0 \text{ є значущим}; t_1 = 2,56 > t_{кр} = 2,31 \rightarrow b_1 \text{ є значущим};$$

$$t_2 = 5,38 > t_{кр} = 2,31 \rightarrow b_2 \text{ є значущим}; t_3 = 2,4 > t_{кр} = 2,31 \rightarrow b_3 \text{ є значущим}.$$

Зважаючи на те, що всі коефіцієнти рівняння регресії є значущими, то наступний етап статистичної обробки результатів факторного експерименту не виконують, і вважають обробку результатів закінченою.

Фактори x_1 , x_2 входять до рівняння регресії у кодованому вигляді. Перейдемо до розкодування рівняння регресії, яке отримали в результаті обробки результатів ПФЕ. Для цього перетворимо за формулами (14) початкові змінні в допоміжні та врахуємо область проведення експериментів (таблиця 6) $X_1 \in (5,0; 10,0)$, $X_2 \in (0,89; 5,33)$.

$$x_1 = \frac{X_1 - 7,5}{2,5}, \quad x_2 = \frac{X_2 - 3,11}{2,22}. \quad (18)$$

Врахуємо ці значення в рівнянні (17). У результаті маємо остаточне рівняння регресії в масштабі реальних факторів такого вигляду:

$$y = 6,38 - 0,63X_1 - 1,60X_2 + 0,84X_1X_2. \quad (19)$$



Отримане остаточне рівняння регресії в масштабі реальних факторів (19) дає змогу провести оптимізацію параметрів створення вологочутливого шару ємнісного сенсора вологості одношарової структури з максимальними значеннями функції відгуку – «чутливість». Як критерій оптимізації параметрів створення вологочутливого шару такого ємнісного сенсора вологості обрано чутливість. З експериментів видно, що чутливість ємнісного сенсора вологості одношарової структури залежить від таких факторів як товщина вологочутливого шару та концентрація розчину солі NaCl, яка виконує функцію адсорбуючого матеріалу. Однак, суттєвий вплив на чутливість ємнісного сенсора вологості має концентрація розчину гігроскопічної солі NaCl. Встановлено, що найбільша чутливість 36,32 пФ/% забезпечується при таких оптимальних параметрах процесу створення вологочутливого шару: концентрації адсорбуючого матеріалу – 5,33 моль/л та товщині вологочутливого шару 10,0 мкм.

1.4. Визначення якісного та кількісного впливу факторів на чутливість ємнісного сенсора вологості двошарової структури

При дослідженні ємнісних вологочутливих елементів одношарової структури, розроблених на основі гігроскопічної солі NaCl встановлено, що основним недоліком таких елементів є те, що вони здатні працювати тільки в обмеженому діапазоні відносної вологості нижче точки роси [6]. Для усунення цього недоліку виникла ідея створення захисного полімерного покриття з метою запобігання випадіння точки роси [7].

Основою розробки слугували ємнісні вологочутливі елементи одношарової структури. Вологочутливим шаром в такій конструкції є гігроскопічна сіль NaCl, яка виконує функцію діелектрика (перший шар). З метою створення вологочутливого шару, використовувались розчини гігроскопічної солі NaCl з концентраціями 0,89 моль/л та 5,33 моль/л, які наносились шляхом розпилення



на поверхню ємнісних сенсорів вологості товщинами 5,0 мкм та 10,0 мкм. Захисним шаром (другий шар) слугувала вологопоглинальна плівка поліметилметакрилату товщинами 40 мкм та 80 мкм.

В такий спосіб отримали ємнісні вологочутливі елементи двошарової структури.

Застосуємо *багатофакторний дисперсійний аналіз* для оцінювання *якісного впливу* на чутливість ємнісного сенсора вологості двошарової структури таких факторів: товщина вологочутливого шару; товщина захисного шару; концентрація розчину солі (гігроскопічна сіль NaCl) та сумісного впливу: товщина вологочутливого шару + товщина захисного шару; товщина вологочутливого шару + концентрація розчину солі; товщина захисного шару + концентрація розчину солі; товщина вологочутливого шару + товщина захисного шару + концентрація розчину солі.

Для розрахунків використаємо такі позначення: фактор A – товщина вологочутливого шару $d_{ВШ}$, мкм; A_1 – нижній рівень фактора A ; A_2 – верхній рівень фактора A ; фактор B – товщина захисного шару $d_{ЗШ}$, мкм; B_1 – нижній рівень фактора B ; B_2 – верхній рівень фактора B ; фактор C – концентрація розчину солі NaCl, яка виконує функцію адсорбуючого матеріалу C , моль/л; C_1 – нижній рівень фактора C ; C_2 – верхній рівень фактора C ; AB – сумісний вплив фактора A та фактора B ; AC – сумісний вплив фактора A та фактора C ; BC – сумісний вплив фактора B та фактора C ; ABC – сумісний вплив факторів A , B та C ; відгук моделі y – чутливість ємнісного сенсора вологості двошарової структури S_C , нФ/‰.

Проведемо оцінювання впливу факторів A , B , C , AB , AC , BC та ABC на чутливість ємнісного сенсора вологості двошарової структури. В таблиці 8 подано результати факторного експерименту.

Кожний фактор має два рівня, тобто $q = 2$ та дванадцять прогонів, тобто $p = 12$. В таблиці 9 подано результати експериментів, які відповідають багатофакторному плану у випадку трьох якісних факторів.



Таблиця 8 – Результати факторного експерименту

	$d_{ВШ} = 5,0$ МКМ	$d_{ВШ} = 10,0$ МКМ	$d_{ЗШ} = 40,0$ МКМ	$d_{ЗШ} = 80,0$ МКМ
$C = 0,89$ МОЛЬ/Л	0,38; 0,48; 0,54	0,75; 0,86; 0,91	0,42; 0,53; 0,6	0,83; 0,95; 1,25
$C = 5,33$ МОЛЬ/Л	0,57; 0,62; 0,75	0,97; 1,78; 2,82	0,68; 0,78; 0,82	1,89; 2,95; 3,78

Таблиця 9 – Результати багатфакторного плану у випадку трьох якісних факторів

2^3	A_1		A_2		Дисперсійний аналіз	
	C_1	C_2	C_1	C_2	дисперсія	кількість ступенів вільності
B_1	0,38; 0,48; 0,54	0,75; 0,86; 0,91	0,42; 0,53; 0,6	0,83; 0,95; 1,25	фактор A фактор B фактор C фактор AB	1 1 1 1
B_2	0,57; 0,62; 0,75	0,97; 1,78; 2,82	0,68; 0,78; 0,82	1,89; 2,95; 3,78	фактор AC фактор BC фактор ABC залишкова	1 1 1 23-7=16
	$p = 12$		$N_{np} = 24$		загальна	24-1=23

Проведемо оцінювання впливу факторів A , B , C , AB , AC , BC та ABC за багатфакторним дисперсійним аналізом, використовуючи вирази (1)– (5). В таблиці 10 подано результати обчислень за формулами (1) – (5).

Зауважимо те, що в знаменнику залишкової дисперсії (4) для багатфакторного плану у випадку трьох якісних факторів кількість ступенів вільності дорівнює 16 (для однофакторного дисперсійного аналізу – 22).

Порівняння факторної та залишкової дисперсії проводилось за величиною критерію Фішера. Отже, використовуючи багатфакторний дисперсійний аналіз доведено, що на відгук моделі, тобто на чутливість ємнісного сенсора вологості двошарової структури впливають: фактор B – товщина захисного шару, $F > F_{кр}$ (4,56>4,49); фактор C – концентрація розчину солі NaCl, $F > F_{кр}$ (9,08>4,49), а



**Таблиця 10 – Результати оцінювання впливу факторів
за дисперсійним аналізом**

Фактори							
A		B		C		AB	
$\overline{y_{A_1}}$	0,95	$\overline{y_{B_1}}$	0,71	$\overline{y_{C_1}}$	0,6	$\overline{y_{AB_1}}$	1,66
$\overline{y_{A_2}}$	1,29	$\overline{y_{B_2}}$	1,53	$\overline{y_{C_2}}$	1,65	$\overline{y_{AB_2}}$	2,82
$\overline{y_A}$	1,12	$\overline{y_B}$	1,12	$\overline{y_C}$	1,13	$\overline{y_{AB}}$	2,24
$S_{факт}$	0,6936	$S_{факт}$	4,0344	$S_{факт}$	6,6156	$S_{факт}$	8,0736
$S_{залиши}$	17,5513	$S_{залиши}$	14,1429	$S_{залиши}$	11,6515	$S_{залиши}$	31,6942
$d_{факт}$	0,6936	$d_{факт}$	4,0344	$d_{факт}$	6,6156	$d_{факт}$	8,0736
$d_{залиши}$	1,1	$d_{залиши}$	0,8839	$d_{залиши}$	0,7282	$d_{залиши}$	2,0
F	0,63	F	4,56	F	9,08	F	4,04
$F_{кр}$	4,49	$F_{кр}$	4,49	$F_{кр}$	4,49	$F_{кр}$	4,49
Фактори							
AC		BC		ABC			
$\overline{y_{AC_1}}$	1,55	$\overline{y_{BC_1}}$	1,31	$\overline{y_{ABC_1}}$			1,24
$\overline{y_{AC_2}}$	2,94	$\overline{y_{BC_2}}$	3,18	$\overline{y_{ABC_2}}$			1,01
$\overline{y_{AC}}$	2,25	$\overline{y_{BC}}$	2,25	$\overline{y_{ABC}}$			1,13
$S_{факт}$	11,5932	$S_{факт}$	20,982	$S_{факт}$			0,318
$S_{залиши}$	29,2028	$S_{залиши}$	25,7944	$S_{залиши}$			17,9245
$d_{факт}$	11,5932	$d_{факт}$	20,982	$d_{факт}$			0,318
$d_{залиши}$	1,8252	$d_{залиши}$	1,6122	$d_{залиши}$			1,1203
F	6,35	F	13,01	F			0,28
$F_{кр}$	4,49	$F_{кр}$	4,49	$F_{кр}$			4,49

також сумісний вплив факторів AC – товщина вологочутливого шару + концентрація розчину солі, $F > F_{кр}$ (6,35 > 4,49) та факторів BC – товщина захисного шару + концентрація розчину солі, $F > F_{кр}$ (13,01 > 4,49), тобто різниця в значеннях відгуку моделі пов'язана зі зміною значення фактора і не може бути спричинена тільки її випадковим характером.

Однак, суттєво впливає на відгук моделі сумісний вплив факторів BC, а саме товщина захисного шару + концентрація розчину солі. В цьому випадку значення критерію Фішера, яке спостерігається в експерименті значно



перевищує критичне значення критерію Фішера, в порівнянні з вище наведеними значеннями впливу факторів. Вплив факторів A , AB і ABC , а саме, товщина вологочутливого шару, сумісного впливу: товщина вологочутливого шару + товщина захисного шару; товщина вологочутливого шару + товщина захисного шару + концентрація розчину солі є несуттєвим, тобто різниця в значеннях відгуку моделі пов'язана з випадковим її характером і не пов'язана зі зміною значення фактора ($F < F_{кр}$). Результати оцінювання впливу факторів на чутливість ємнісного сенсора вологості двошарової структури за багатофакторним дисперсійним аналізом подано в таблиці 10.

За допомогою *регресійного аналізу* визначимо *кількісний вплив* на чутливість ємнісного сенсора вологості двошарової структури таких факторів: товщина вологочутливого шару; товщина полімерного покриття, як захисного шару; концентрація розчину солі, як адсорбуючого матеріалу.

Для розрахунків приймемо такі позначення: фактор X_1 – товщина вологочутливого шару d , мкм; фактор X_2 – товщина захисного шару d , мкм; фактор X_3 – концентрація розчину солі NaCl, яка виконує функцію адсорбуючого матеріалу C , моль/л; відгук моделі y – чутливість ємнісного сенсора вологості двошарової структури S_C , нФ/‰.

Для трьох факторів кількість експериментів $-2^3 = 8$, тобто $N = 8$.

При проведенні повного факторного експерименту типу 2^3 при кількості прогонів $p = 3$ отримано такі значення відгуку моделі y_{ij} (таблиця 11):

Таблиця 11 – Результати повного факторного експерименту типу 2^3

X_1	X_2	X_3	y_{j1}	y_{j2}	y_{j3}
5,0	40	0,89	0,38	0,48	0,54
10,0	40	0,89	0,42	0,53	0,6
5,0	80	0,89	0,57	0,62	0,75
10,0	80	0,89	0,68	0,78	0,82
5,0	40	5,33	0,75	0,86	0,91
10,0	40	5,33	0,83	0,95	1,25
5,0	80	5,33	0,97	1,78	2,82
10,0	80	5,33	1,89	2,95	3,78



Проведемо статистичну обробку результатів факторного експерименту. Спочатку за формулами (6)–(10) обчислимо спостережуване значення критерію Кохрена: максимальне значення дисперсії – $D_{\max} = 0,9$; сумарне значення дисперсії – $D_{\Sigma} = 1,85$; спостережуване значення критерію Кохрена – $G \approx 0,486$.

Наступним кроком статистичної обробки результатів факторного експерименту є визначення табличного значення критерію Кохрена $G_{кр}$. При рівні значимості $\alpha = 0,05$, кількості ступенів вільності $m = p - 1 = 3 - 1 = 2$, маємо $G_{кр} = 0,516$. Оскільки $0,486 < 0,516$ ($G < G_{кр}$) можна зробити висновок, що факторний експеримент є відтворюваним. За виразом (11) визначена оцінка дисперсії генеральної сукупності, яка набуває значення: $D = 0,23$.

Складемо матрицю планування повнофакторного експерименту (ПФЕ) (таблиця 12) та визначимо коефіцієнти рівняння регресії за формулами (12).

Таблиця 12 – Матриця планування ПФЕ

2^3	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	y_j
1	+	-	-	-	+	+	+	-	0,47
2	+	+	-	-	-	-	+	+	0,52
3	+	-	+	-	-	+	-	+	0,65
4	+	+	+	-	+	-	-	-	0,76
5	+	-	-	+	+	-	-	+	0,84
6	+	+	-	+	-	+	-	-	1,01
7	+	-	+	+	-	-	+	-	1,86
8	+	+	+	+	+	+	+	+	2,87

Коефіцієнти рівняння регресії набувають таких значень:

$$b_0 = 1,12; \quad b_1 = 0,17; \quad b_2 = 0,41; \quad b_3 = 0,52; \quad b_4 = 0,11;$$

$$b_5 = 0,13; \quad b_6 = 0,31; \quad b_7 = 0,1.$$

В результаті рівняння регресії має вигляд:

$$y^{pe2} = 1,12 + 0,17x_1 + 0,41x_2 + 0,52x_3 + 0,11x_1x_2 + 0,13x_1x_3 + 0,31x_2x_3 + 0,1x_1x_2x_3. \quad (20)$$



З отриманого рівняння регресії (20) видно, що фактор x_3 – концентрація розчину солі NaCl спричиняє на відгук моделі набагато більший вплив ніж фактори: x_1 – товщина вологочутливого шару; x_2 – товщина захисного шару та їх сумісний вплив. Отже, отримане рівняння регресії можна використовувати для наближених розрахунків відгуку моделі в області проведення експериментів.

Оскільки експеримент є відтворюваним, то перейдемо до наступного етапу статистичної обробки результатів. А саме, проведемо оцінювання значущості коефіцієнтів рівняння регресії за критерієм Стьюдента.

При рівні значимості $\alpha = 0,05$, числі ступенів вільності $m = N \cdot (p - 1) = 8 \cdot (3 - 1) = 16$, табличне значення критерію Стьюдента – $t_{кр} = 2,12$.

За формулою (13) проведемо оцінювання значущості коефіцієнтів b_j :

$t_0 = 11,45 > t_{кр} = 2,12 \rightarrow b_0$ є значущим; $t_1 = 1,74 < t_{кр} = 2,12 \rightarrow b_1$ є незначущим;
 $t_2 = 4,2 > t_{кр} = 2,12 \rightarrow b_2$ є значущим; $t_3 = 5,3 > t_{кр} = 2,12 \rightarrow b_3$ є значущим;
 $t_4 = 1,12 < t_{кр} = 2,12 \rightarrow b_4$ є незначущим; $t_5 = 1,33 < t_{кр} = 2,12 \rightarrow b_5$ є незначущим;
 $t_6 = 3,17 > t_{кр} = 2,12 \rightarrow b_6$ є значущим; $t_7 = 1,02 < t_{кр} = 2,12 \rightarrow b_7$ є незначущим.

Скориговане рівняння регресії за критерієм Стьюдента має вигляд:

$$y^{рег} = 1,12 + 0,41x_2 + 0,52x_3 + 0,31x_2x_3. \quad (21)$$

Зважаючи на те, що в рівнянні регресії є незначущі коефіцієнти, перейдемо до наступного етапу статистичної обробки результатів факторного експерименту. Перевіримо адекватність отриманого рівняння регресії результатам експерименту за критерієм Фішера.

Підставимо відповідні значення факторів у рівняння (21) і визначимо значення відгуку моделі в кожному експерименті. Обчислені значення $y^{рег}$ заносимо у таблицю результатів експериментів (таблиця 13):



Таблиця 13 – Значення відгуку моделі в кожному експерименті

2^3	x_2	x_3	y	y^{pez}
1	-	-	0,47	0,5
2	-	-	0,52	0,5
3	+	-	0,65	0,7
4	+	-	0,76	0,7
5	-	+	0,84	0,92
6	-	+	1,01	0,92
7	+	+	1,86	2,36
8	+	+	2,87	2,36

Визначимо значення адекватності дисперсії за формулою (15), враховуючи, що $N = 8$, $L = 4$:

$$D_{ad} = 5 \cdot 10^{-3}.$$

Значення критерію Фішера обчислене за формулою (16) має вигляд:

$$F = 0,02.$$

Критичне значення критерію Фішера при рівні значимості $\alpha = 0,05$ і кількості ступенів вільності $m_1 = N \cdot (p - 1) = 8 \cdot (3 - 1) = 16$ та $m_2 = p - 1 = 3 - 1 = 2$ дорівнює

$$F_{кр} = 19,41.$$

Оскільки $F < F_{кр}$, рівняння регресії (21) визнається адекватним результатам факторного експерименту.

Фактори x_2 та x_3 входять до рівняння регресії (21) у кодованому вигляді. Розкодуємо рівняння регресії (21). За формулами (14) перетворимо початкові змінні в допоміжні та врахуємо область проведення експериментів (таблиця 11) $X_1 \in (5, 0; 10, 0)$, $X_2 \in (40; 80)$, $X_3 \in (0, 89; 5, 33)$:

$$x_1 = \frac{X_1 - 7,5}{2,5}, \quad x_2 = \frac{X_2 - 60}{20}, \quad x_3 = \frac{X_3 - 3,11}{2,22}. \quad (22)$$

Остаточне рівняння регресії в масштабі реальних факторів має такий вигляд:

$$y^{pez} = 0,46 - 0,001X_2 - 0,18X_3 + 0,01X_2X_3. \quad (23)$$



Рівняння регресії в масштабі реальних факторів (23) сприяє оптимізації параметрів виготовлення ємнісного сенсора вологості двошарової структури з максимальним значенням функції відгуку моделі – «чутливість». Критерієм оптимізації параметрів виготовлення вологочутливого та захисного шарів ємнісного сенсора вологості двошарової структури є чутливість. З експериментів видно, що чутливість ємнісного сенсора вологості двошарової структури залежить від таких факторів: товщина захисного шару та концентрація розчину солі NaCl, яка виконує функцію адсорбуючого матеріалу. Однак, суттєво впливає на чутливість ємнісного сенсора вологості двошарової структури концентрація розчину гігроскопічної солі NaCl. Встановлено, що найбільша чутливість 2,36 нФ/% забезпечується за таких оптимальних параметрів процесу виготовлення ємнісного сенсора вологості двошарової структури: концентрація адсорбуючого матеріалу – 5,33 моль/л, товщина захисного шару – 80 мкм. Враховуючи те, що товщина вологочутливого шару не впливає на чутливість ємнісного сенсора вологості, товщину цього шару можна взяти в діапазоні від 5,0 мкм до 10,0 мкм.

1.5. Застосування дробового факторного експерименту для кількісного оцінювання впливу факторів на чутливість ємнісного сенсора вологості двошарової структури

Доведено, що повні факторні плани дають змогу найточніше вивчити механізм впливу факторів на досліджувану систему і сприяють формулюванню найбільш обґрунтованих висновків. Проведення повних факторних експериментів в багатофакторних системах пов'язане із значними труднощами, тобто розмір матриці планування та обсяг експерименту значно зростає зі збільшенням кількості факторів. Водночас в рівнянні регресії суттєво збільшується кількість доданків, які описують взаємодії факторів. Дослідника цікавлять лише доданки, які описують фактори. Тому за великої кількості факторів нехтують деякою частиною рівняння регресії, що описує складні



взаємодії факторів. Для цього будують дробовий план експерименту. Дробовий план факторного експерименту виходить з повного плану прирівнюванням лінійних ефектів до ефектів взаємодії. Кожне введене співвідношення зменшує план вдвічі. Тому, якщо повний план – типу 2^k і введено m співвідношень, то виходить дробовий план типу 2^{k-m} . Для отримання лінійних моделей широко використовуються дробові репліки. Ефективність використання дробових реплік залежить від правильного вибору системи змішування лінійних ефектів з ефектами взаємодії. Зважаючи на те, що в дробових репліках частина взаємодій замінюється новими факторами, обчислені коефіцієнти рівняння регресії будуть сумісними оцінками лінійних ефектів та ефектів взаємодії. Зі збільшенням кількості факторів зростає доцільність їх використання [20–23].

У таблиці 14 продемонстровано як кількість експериментальних досліджень суттєво залежить від значення дробової репліки [23].

Таблиця 14 – Умовні позначення дробових реплік та кількість дослідів

Кількість факторів	Дробова репліка	Умовне позначення	Кількість дослідів	
			для дробової репліки	для ПФЕ
3	1/2 репліка від 2^3	2^{3-1}	4	8
4	1/2 репліка від 2^4	2^{4-1}	8	16
5	1/4 репліка від 2^5	2^{5-2}	8	32
6	1/8 репліка від 2^6	2^{6-3}	8	64
7	1/16 репліка від 2^7	2^{7-4}	8	128
5	1/2 репліка від 2^5	2^{5-1}	16	32
6	1/4 репліка від 2^6	2^{6-2}	16	64
7	1/8 репліка від 2^7	2^{7-3}	16	128
8	1/16 репліка від 2^8	2^{8-4}	16	256
9	1/32 репліка від 2^9	2^{9-5}	16	512
10	1/64 репліка від 2^{10}	2^{10-6}	16	1024

Скорочення кількості дослідів спричиняє появу кореляції між оцінками коефіцієнтів. Ця обставина не дозволяє окремо оцінювати ефекти факторів і ефекти взаємодії. Утворюються так звані змішані оцінки [20–22].



В роботі [10] для оцінювання впливу факторів на чутливість ємнісного сенсора вологості двошарової структури застосовано повний факторний експеримент типу 2^3 , який передбачав проведення 8 експериментів. Застосуємо дробовий факторний експеримент (ДФЕ) для зменшення кількості експериментів, який є частиною від повного факторного експерименту. Загалом, щоб правильно досліджувати об'єкт за допомогою ДФЕ, потрібно застосувати велику кількість теоретичних відомостей про об'єкт дослідження, щоб визначити, яким впливом взаємодіючих факторів можна знехтувати.

Для дробових реплік застосуємо спеціальні алгебричні співвідношення, які називаються генерувальними співвідношеннями і визначальними контрастами. Такі алгебричні співвідношення сприятимуть виявленню змішаних ефектів [20–23].

Побудуємо план дробового факторного експерименту, тобто замість плану 2^3 використаємо його піврепліку – план 2^{3-1} (таблиця 14). Введемо генерувальне співвідношення

$$x_3 = x_1 x_2. \quad (24)$$

Помножимо праву та ліву частини співвідношення (24) на нововведений фактор x_3 та використаємо умову $x_i^2 = 1$. Отримаємо:

$$x_3 \cdot x_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3.$$

Визначальний контраст, який задає елементи першого стовпця матриці планування набуває вигляду:

$$+1 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3. \quad (25)$$

Розв'язувальна здатність цієї піврепліки дорівнює трьом. На основі визначального контрасту (25) одержимо систему змішаних оцінок для цієї дробової репліки в такий спосіб: праву та ліву частини співвідношення (25) помножимо на кожний фактор та взаємодії факторів. Нижче подано співвідношення, якими задаються змішані оцінки коефіцієнтів рівняння регресії:

$$x_1 = x_1^2 x_2 x_3 = x_2 x_3, \quad x_2 = x_1 x_2^2 x_3 = x_1 x_3, \quad x_3 = x_1 x_2 x_3^2 = x_1 x_2. \quad (26)$$



Для плану дробового факторного експерименту типу 2^{3-1} змішування оцінок набуває такого вигляду:

$$b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{23}, \quad b_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{13}, \quad b_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{12}.$$

Потрібно зазначити, що ДФЕ проводиться в припущенні, що лінійні ефекти є домінуючими і змішування оцінок ефектів не означає невизначеності. Зазвичай явище змішування оцінок прийнято записувати в символічній формі.

Матриця планування плану дробового факторного експерименту типу 2^{3-1} містить стовпці x_0 , x_1 , x_2 та x_3 . Для побудови рівняння регресії достатньо чотирьох дослідів, тобто $N = 4$, кількість прогонів $p = 3$.

В таблиці 15 подано результати дробового факторного експерименту типу 2^{3-1} . Обробка результатів ДФЕ здійснюється в такий самий спосіб, як і для повнофакторного експерименту (ПФЕ).

Таблиця 15 – Результати ДФЕ типу 2^{3-1}

X_1	X_2	X_3	y_{j1}	y_{j2}	y_{j3}
5,0	40	5,33	0,91	1,44	1,81
10,0	40	0,89	0,68	0,79	0,98
5,0	80	0,89	0,76	0,82	1,25
10,0	80	5,33	1,82	2,87	3,61

Експериментальними зразками слугували ємнісні сенсори вологості двошарової структури, виготовлені на ситаловій підкладці. Для створення вологочутливого шару, який виконував би функцію діелектрика застосовано гігроскопічну сіль NaCl. Розчини цієї солі з концентраціями 0,89 моль/л та 5,33 моль/л наносились шляхом розпилення на поверхню ємнісних сенсорів вологості товщинами 5,0 мкм та 10,0 мкм. З метою запобігання випадіння точки роси створено захисний шар – це вологопоглинальна плівка поліметилметакрилату товщинами 40 мкм та 80 мкм.

Для поточних розрахунків використаємо такі позначення: фактор X_1 – товщина вологочутливого шару d , мкм; фактор X_2 – товщина захисного шару d , мкм; фактор X_3 – концентрація розчину солі NaCl, яка виконує функцію



адсорбувального матеріалу C , моль/л; відгук моделі y – чутливість ємнісного сенсора вологості двошарової структури S_C , нФ/%.

Спочатку проведемо статистичну обробку результатів факторного експерименту, яка передбачає розрахунок значень дисперсії у кожному експерименті D_j , сумарне D_Σ та максимальне D_{\max} значення дисперсії. На основі отриманих значень виконаємо оцінювання відтворюваності експерименту за критерієм Кохрена, використовуючи вирази (6) – (10):

На основі виразів (6) – (10) отримано такі значення: максимальне значення дисперсії – $D_{\max} = 0,8091$; сумарне значення дисперсії – $D_\Sigma = 1,1084$; спостережуване значення критерію Кохрена – $G \approx 0,730$.

Перейдемо до визначення табличного значенням критерію Кохрена $G_{кр}$. За рівня значимості $\alpha = 0,05$, кількості ступенів вільності $m = p - 1 = 3 - 1 = 2$, отримуємо табличне значення критерію Кохрена – $G_{кр} = 0,768$. Факторний експеримент є відтворюваним, тому що $G < G_{кр}$ ($0,730 < 0,768$). За виразом (11) обчислимо оцінку дисперсії генеральної сукупності, яка набуває значення – $D = 0,2771$.

Розробимо матрицю планування ДФЕ (таблиця 16) та обчислимо коефіцієнти рівняння регресії, використовуючи формули (12):

Таблиця 16 – Матриця планування ДФЕ

2^{3-1}	x_0	x_1	x_2	$x_3 = x_1x_2$	y_j
1	+	-	-	+	1,39
2	+	+	-	-	0,82
3	+	-	+	-	0,94
4	+	+	+	+	2,77

Обчислені коефіцієнти рівняння регресії за формулами (12) мають такі значення:

$$b_0 = 1,48; \quad b_1 = 0,32; \quad b_2 = 0,38; \quad b_3 = 0,6.$$

Рівняння регресії набуває вигляду:



$$y^{pez} = 1,48 + 0,32x_1 + 0,38x_2 + 0,6x_3. \quad (27)$$

На основі отриманого рівняння регресії (27) можна зробити висновок, що на відгук моделі найбільший вплив має фактор x_3 , тобто концентрація розчину солі NaCl, ніж фактори: x_1 – товщина вологочутливого шару та x_2 – товщина захисного шару. В області проведення експериментів отримане рівняння регресії ДФЕ можна використовувати для наближених розрахунків відгуку моделі.

Враховуючи те, що експеримент є відтворюваним, проведемо наступний етап статистичної обробки результатів. Тобто оцінимо значущість коефіцієнтів рівняння регресії за критерієм Стьюдента. За формулою (13) обчислимо спостережуване значення критерію Стьюдента [20].

За рівня значимості $\alpha = 0,05$, числа ступенів вільності $m = N \cdot (p - 1) = 4 \cdot (3 - 1) = 8$, табличне значення критерію Стьюдента набуває значення: $t_{кр} = 2,31$.

Перейдемо до оцінювання значущості коефіцієнтів b_j , які набувають таких значень за формулою (13):

$$t_0 = 9,74 > t_{кр} = 2,31 \rightarrow b_0 \text{ є значущим}; \quad t_1 = 2,11 < t_{кр} = 2,31 \rightarrow b_1 \text{ є незначущим};$$

$$t_2 = 2,5 > t_{кр} = 2,31 \rightarrow b_2 \text{ є значущим}; \quad t_3 = 3,95 > t_{кр} = 2,31 \rightarrow b_3 \text{ є значущим}.$$

Врахуємо цей етап обчислень в рівнянні (27). Рівняння регресії набуває вигляду:

$$y^{pez} = 1,48 + 0,38x_2 + 0,6x_3. \quad (28)$$

Оскільки в рівнянні регресії є незначущі коефіцієнти, проведемо наступний етап статистичної обробки результатів факторного експерименту. Перевіримо за критерієм Фішера адекватність отриманого рівняння регресії результатам ДФЕ.

Врахуємо відповідні значення факторів у рівнянні (28) та обчислимо значення відгуку моделі в кожному експерименті.

В таблиці 17 подано обчислені значення y^{pez} результатів експериментів:



Таблиця 17 – Значення відгуку моделі в кожному експерименті

2^{3-1}	x_2	x_3	y	$y^{рег}$
1	-	+	1,39	1,7
2	-	-	0,82	0,5
3	+	-	0,94	1,26
4	+	+	2,77	2,46

Визначимо значення адекватності дисперсії за формулою (15), враховуючи, що $N = 4$, $L = 2$:

$$D_{ад} = 0,199 .$$

Значення критерію Фішера обчислене за формулою (16) має вигляд:

$$F = 0,72 .$$

Критичне значення критерію Фішера за рівня значимості $\alpha = 0,05$ і кількості ступенів вільності $m_1 = N \cdot (p - 1) = 4 \cdot (3 - 1) = 8$ та $m_2 = p - 1 = 3 - 1 = 2$ дорівнює

$$F_{кр} = 19,37 .$$

Оскільки $F < F_{кр}$ ($0,72 < 19,37$), рівняння регресії (28) є адекватним результатам факторного експерименту.

В рівнянні регресії (28) фактори x_2 та x_3 в кодованому вигляді. Розкодуємо рівняння регресії (28), для цього за формулами (14) перетворимо початкові змінні в допоміжні та врахуємо область проведення експериментів (таблиця 15) $X_1 \in (5,0; 10,0)$, $X_2 \in (40; 80)$, $X_3 \in (0,89; 5,33)$:

$$x_1 = \frac{X_1 - 7,5}{2,5}, \quad x_2 = \frac{X_2 - 60}{20}, \quad x_3 = \frac{X_3 - 3,11}{2,22} . \quad (29)$$

Рівняння регресії в масштабі реальних факторів має такий вигляд:

$$y^{рег} = -0,501 + 0,019X_2 + 0,27X_3 . \quad (30)$$

Розроблено план ДФЕ типу 2^{3-1} з метою зменшення кількості дослідів, на основі якого отримано рівняння регресії в масштабі реальних факторів (30). За критерієм Кохрена доведено, що ДФЕ є відтворюваним. Використовуючи критерій Стьюдента визначено значущі коефіцієнти рівняння регресії.



Адекватність результатам факторного експерименту скоригованого рівняння регресії доведена за допомогою критерію Фішера.

За допомогою рівняння регресії в масштабі реальних факторів можна здійснити оптимізацію параметрів виготовлення ємнісного сенсора вологості двошарової структури з максимальним значенням функції відгуку моделі. Критерієм оптимізації параметрів виготовлення вологочутливого та захисного шарів ємнісного сенсора вологості двошарової структури є чутливість. На основі проведеного ДФЕ встановлено, що чутливість ємнісного сенсора вологості двошарової структури залежить від таких факторів, як товщина захисного шару і концентрація розчину солі NaCl. Однак, на чутливість ємнісного сенсора вологості двошарової структури суттєво впливає концентрація розчину гігроскопічної солі NaCl.

Найбільша чутливість 2,46 нФ/% забезпечується за таких оптимальних параметрів процесу виготовлення ємнісного сенсора вологості двошарової структури: концентрація розчину гігроскопічної солі NaCl – 5,33 моль/л, товщина захисного шару – 80 мкм. Враховуючи те, що товщина вологочутливого шару суттєво не впливає на чутливість ємнісного сенсора вологості, товщину цього шару можна взяти в діапазоні від 5,0 мкм до 10,0 мкм.

Висновки

В поданій роботі теоретично доведено, що методи математичної статистики доцільно використовувати для систематизації, оброблення та аналізу експериментальних даних, ефективність та достовірність яких залежить від обраного метода математичної статистики. Крім того, ефективним засобом одержання математичної моделі досліджуваного об'єкта є повний факторний експеримент за кількості факторів більше 3. Зі збільшенням кількості факторів суттєво збільшується як точність моделі, так й кількість експериментів. Збільшення кількості експериментів призводить до великих затрат часу та коштів, тому за таких обставин доцільно застосувати ДФЕ. Однак, для коректного дослідження об'єкта за допомогою ДФЕ потрібно застосувати



широкий спектр теоретичних відомостей про досліджуваний об'єкт для того, щоб визначити взаємодії факторів, впливом яких можна знехтувати. Саме цю інформацію потрібно застосувати для побудови реплік заданої дробовості з метою побудови апроксимувального полінома.

Експериментальними зразками слугували ємнісні сенсори вологості одношарової та двошарової структури (м. Вінниця, Україна, ВНТУ), які виготовлені на ситаловій підкладці розміром $0,7 \times 0,9$ см, на поверхні якої нанесена плівка міді, яка утворює обкладки конденсатора у вигляді меандру з відповідною геометрією $7,85 \cdot 10^{-2} \times 150 \cdot 10^{-6} \times 1,2 \cdot 10^{-6}$ м.

Встановлено, що метрологічні характеристики вологочутливих елементів визначаються насамперед фізико-хімічними та адсорбційними властивостями використаного сорбенту.

Розроблено план ПФЕ та ДФЕ типу 2^{3-1} . На основі яких отримано рівняння регресії в масштабі реальних факторів. За критерієм Кохрена доведено, що ПФЕ та ДФЕ є відтворюваними. За критерієм Стюдента визначено значущі коефіцієнти рівняння регресії. Адекватність результатам ПФЕ та ДФЕ скоригованого рівняння регресії доведена за допомогою критерію Фішера.

Використовуючи багатofакторний дисперсійний аналіз встановлено, що на відгук моделі, а саме на чутливість ємнісного сенсора вологості одношарової структури вагомий вплив має фактор – концентрація розчину солі NaCl. В цьому випадку значення критерію Фішера, яке спостерігається в експерименті значно перевищує критичне значення критерію Фішера, а саме $22,77 > 4,75$ ($F > F_{кр}$). Однак в двошаровій структурі ємнісного сенсора вологості, суттєво впливає на відгук моделі сумісний вплив фактора – товщина захисного шару + концентрація розчину солі. В цьому випадку значення критерію Фішера, яке спостерігається в експерименті значно перевищує критичне значення критерію Фішера $F > F_{кр}$ ($13,01 > 4,49$).

Отримані рівняння регресії в масштабі реальних факторів сприяють оптимізації параметрів виготовлення ємнісних сенсорів вологості одношарової



та двошарової структури з максимальним значенням функції відгуку моделі – «чутливість». Як критерій оптимізації параметрів створення вологочутливого та захисного шарів ємнісних сенсорів вологості одношарової та двошарової структури відповідно, обрано чутливість. Встановлено, що найбільша чутливість 36,32 пФ/% ємнісних сенсорів вологості одношарової структури забезпечується при таких оптимальних параметрах процесу виготовлення вологочутливого шару: концентрації розчину адсорбуючого матеріалу, а саме гігроскопічної солі NaCl – 5,33 моль/л і товщині вологочутливого шару 10,0 мкм.

Стосовно ємнісного сенсора вологості двошарової структури, то при проведенні ПФЕ найбільша чутливість 2,36 нФ/% забезпечується за таких оптимальних параметрів процесу виготовлення: концентрація адсорбуючого матеріалу – 5,33 моль/л, товщина захисного шару – 80 мкм, при проведенні ДФЕ – найбільша чутливість набуває значення 2,46 нФ/% за таких оптимальних параметрів процесу виготовлення ємнісного сенсора вологості двошарової структури: концентрація розчину гігроскопічної солі NaCl – 5,33 моль/л, товщина захисного шару – 80 мкм. Зважаючи на те, що товщина вологочутливого шару не впливає на чутливість ємнісного сенсора вологості двошарової структури, товщину цього шару доцільно взяти в діапазоні від 5,0 мкм до 10,0 мкм. Встановлено, що створення полімерного покриття як захисного шару з метою запобігання випадіння точки роси зменшує чутливість ємнісного сенсора вологості двошарової структури до впливу відносної вологості навколишнього середовища.