



KAPITEL 4 / CHAPTER 4⁴ DISTRIBUTION OF GRAPHS AS MODELS OF COMBINATORIAL CONFIGURATIONS INTO TREES

DOI: 10.30890/2709-2313.2025-36-02-022

Вступ

У деякому сенсі слово "комбінаторика" можна розуміти як синонім поняття «дискретна математика», тобто дослідження дискретних скінченних математичних структур. На шкільному рівні з терміном «комбінаторика» зв'язують просто набір відомих формул, які використовуються для обчислення так званих *комбінаторних чисел*, про які мова йде в перших розділах цієї глави. Може здаватися, що ці формули корисні тільки для розв'язання навчальних задач і не мають відношення до практичного застосування. Насправді це далеко не так. Обчислення на дискретних скінченних математичних структурах, що часто називають *комбінаторними обчисленнями*, потребують попереднього комбінаторного аналізу для встановлення властивостей і виявлення кількісної оцінки вихідних задач і алгоритмів, які використовуються, а також придатності використовуваних алгоритмів.

Задачі звичайно оцінюються з погляду розміру, тобто загальної кількості різноманітних варіантів, серед яких потрібно знайти розв'язок, а алгоритми оцінюються з погляду складності. При цьому розрізняють складність за часом (або *часову складність*), тобто кількість необхідних кроків алгоритму, і складність по пам'яті (або *ємнісну складність*), тобто обсяг пам'яті, необхідний для роботи алгоритму.

У всіх випадках основним інструментом такого аналізу є формули і методи, які аналізуються в цій роботі.

У багатьох практичних випадках виникає необхідність підрахувати кількість можливих комбінацій об'єктів, що задовольняють визначеним умовам. Такі задачі називаються комбінаторними. Розмаїтість комбінаторних задач не

⁴Authors: Myronenko Oksana

Number of characters: 38086

Author's sheets: 0,95



піддається вичерпному опису, але серед них є цілий ряд таких, що зустрічаються особливо часто, для яких відомі засоби підрахунку.

Для формулювання і розв'язання комбінаторних задач використовуються різноманітні моделі *комбінаторних конфігурацій*. Розглянемо дві найбільш популярні моделі:

1) дано n предметів. Їх потрібно розмістити по m ящиках так, щоб виконувалися задані обмеження. Скількома засобами це можна зробити?

2) розглянемо множину функцій

$$F: X \rightarrow Y, \text{ де } |X|=n, |Y|=m, X=\{1, \dots, n\}.$$

Не обмежуючи узагальнення, можна вважати, що

$$Y=\{1, \dots, m\}, F=\langle F(1), \dots, F(n) \rangle, 1 \leq F(i) \leq m.$$

Задача полягає у знаходженні відповіді на питання: Скільки існує функцій F , що задовольняють заданим обмеженням?

4.1. Огляд результатів попередніх досліджень

У роботі безпосередньо розглядаються задачі, пов'язані з існуванням розкладів повних графів на підграфи, зокрема на дерева, взяті з певної множини графів, з методами і алгоритмами розв'язування задач T -факторизації повних графів та з переліком сімейств неізоморфних розкладів.

Дослідження у такій галузі математики, як теорія графів, продовжуються більше ніж півтора століття. За цей час змінювалася і доповнювалася термінологія, розгалужувалися напрямки досліджень і одержані результати породжували нові питання та задачі, відкриваючи широкі можливості для пошуку методів і алгоритмів їх вирішення і розв'язку.

Початком досліджень можна вважати статтю Т. П. Кірмана [1], яку він опублікував у 1847 році. В цій роботі поставлено і повністю розв'язано задачу про існування систем трійок, які дійшли до наших часів під назвою штейнерових систем трійок (ШСТ). Кірманом було встановлено, що ШСТ порядку n існують



тільки при $n \equiv 1$ або $3 \pmod{6}$. Серед ШСТ ним було виділено такі, які допускають розбиття множини трійок на паралельні класи множин E , кожен з яких є розбиттям основної множини на трійки і кожен два елементи множини E входять разом в одну і тільки в одну з трійок, які приймають участь у паралельних класах цього сімейства (кіркманів розклад), так звані кіркманові системи трійок (КСТ), і встановлено необхідну умову їх існування $n \equiv 3 \pmod{6}$ для КСТ порядку n .

Досить довгий час дослідники розробляли методи побудови КСТ. Одними з перших, хто працював над складанням переліку усіх неізоморфних ШСТ при $n=13$ були В. Де Паскуаль, К. Цулауф, та Г. Брунелль. Значний внесок у розв'язування задачі переліку систем трійок зробили Г. Уайт, Ф. Н. Коул та Л. Камінгс у 1922 році, з'ясувавши, що існують 80 неізоморфних ШСТ порядку 15, з яких 4 являються кіркмановими, причому 3 з них допускають по два неізоморфні кіркманові розклади, а одна допускає лише один розклад.

У 1936 році Р. Пелтесон розв'язала задачу існування ШСТ одного з найбільш досліджених класів циклічних ШСТ. Їй вдалося побудувати циклічну ШСТ для кожного порядку $n \equiv 1$ або $3 \pmod{6}$, $n \neq 9$.

А. Г'ярфас і Дж. Легель [2] сформулювали наступну гіпотезу: для всякого заголовка $T_1, T_2, \dots, T_{n-1}$ існує $(T_1, T_2, \dots, T_{n-1})$ -розклад. Їм вдалося довести, що ця гіпотеза вірна для заголовків, у яких тільки два дерева не зірки. В подальших спробах довести цю гіпотезу з'явилися нові цікаві задачі про існування розкладів подібних видів [3-5].

Зацікавив цей напрямок досліджень деревних розкладів і нашого співвітчизника А. Я. Петренюка. Його статті початку 70-х років минулого століття [6, 7] було присвячено задачі розрізнення/ототожнення різних комбінаторних конфігурацій, зокрема ШСТ і КСТ, та методам побудови ШСТ і більш загальних схем інцидентностей. Ці методи стали основою для розробки та впровадження у дослідження графів інших методів побудови базових компонент розкладу повного графу K_n на дерева.

Значний стрибок у вирішенні питання побудови та переліку КСТ було зроблено тільки приблизно у 70-ті роки ХХ століття, про що йдеться у книзі Є.



Нетто [8]. Також на початку 70-тих років XX століття відбулися зміни у термінології у цьому напрямку математичної науки від теоретико-множинної до сучасної, теоретико-графової. Змінився і погляд на предмет дослідження, тобто ШСТ, блок-схеми, системи груп пар стали розглядатися як розклади на повні підграфи повних графів. Так кіркманів розклад порядку n почали розглядати як розклад повного n -вершинного графу K_n на такі його n -вершинні підграфи, у яких зв'язні компоненти кожного з них являються трикутниками. Згодом узагальнилося поняття класу комбінаторних конфігурацій - розкладів графів на підграфи певних типів. Це явно простежується при формулюванні задачі у роботі Д. Рей-Чаудхурі та Р. Вілсона [9].

Інтерес до проблем теорії графів відновився близько середини минулого століття і був зосереджений головним чином в Англії. Для такого пожвавлення вивчення графів було багато причин. Головними серед них були активний розвиток формальної логіки та низки природничих наук. Цікавим для дослідників виявився клас задач про комбінаторні конфігурації, які спочатку називалися системами груп пар, а пізніше одержали назву 1-факторизації повних графів. Ці конфігурації розглядали у своїх дослідженнях Т. Кіркман та Л. Камінгс [1], як допоміжні. Але згодом вони виділилися у самостійний клас конфігурацій, так як окреслилося широке коло досліджень у цьому напрямку. Початком у цих дослідженнях можна вважати одержаний ще у 1906 році Л. Діксоном і Ф. Саффордом результат переліку систем 1-факторизацій порядку 8. Подальші результати досліджень цього класу задач належать А. Роса [10, 11], який сформулював таку задачу: визначити множину можливих розмірів максимальних $(m, 2n)$ -конфігурацій у графі порядку $2n$. Він зазначив, що ця задача розв'язана у випадку $2n=10$.

1-фактором графу G порядку $2n$ називається регулярний підграф степеня 1 у графі G , якщо множина вершин цього підграфу співпадає з множиною вершин графу G . Два 1-фактори графу G узгоджені, якщо їх об'єднання представляє собою гамільтонів цикл графу G .



Сімейство 1-факторів графу G порядку $2n$, що складається з m факторів, називається $(m, 2n)$ -конфігурацією, якщо кожен два її 1-фактори узгоджені.

Роботи А. Я. Петренюка присвячено розв'язанню задачі А. Роса [11] для повного графу порядку $2n=12$. В результаті досліджень складено перелік досконалих 1-факторизацій порядку 12 та кубічних графів Q_3 і Q_4 з точністю до ізоморфізму. Також цим вченим поставлено задачу знаходження значень $p(2n)$ - мінімального розміру максимальної $(m, 2n)$ -конфігурації, складено алгоритм перевірки ізоморфізму 1-факторизацій та наведено перелік досконалих 1-факторизацій порядку 12.

Серед усіх типів підграфів особливу увагу математиками приділено задачі про існування та перелік розкладів повних графів на дерева, зокрема T -факторизацій. З початком досліджень у цьому напрямі можна ознайомитися завдяки роботам Ш. Хуанг і А. Роса [10,11] та Л. Байнеке [12]. Потрібно зазначити, що T -факторизацією для дерева T парного порядку n називають розклад повного графу K_n на підграфи (фактори), кожний з яких ізоморфний відповідному дереву. Зокрема Л. Байнеке [12] була сформульована задача, яка полягає в тому, щоб з'ясувати, для яких дерев існують T -факторизації. Він не тільки сформулював цю задачу, а й встановив необхідну умову $\Delta(T) \leq k$ існування T -факторизацій парного порядку n , тобто при $n=2k$. $\Delta(T)$ у цій задачі означає найвищий степінь вершини у дереві T . Ш. Хуанг і А. Роса повністю розв'язали задачу про існування T -факторизацій для всіх парних значень порядку $n \leq 8$.

Вагомий внесок у цей напрямок досліджень зробив А. Я. Петренюк, який на початку нинішнього століття взявся за розв'язання задачі Л. Байнеке для повного графу порядку 10. Зокрема, в роботі [7] встановлено, що для кожного дерева T порядку 10 існує точно 5 можливих типів вершин, а також складено співвідношення, з яких ці типи вершин можна визначити.

А. Я. Петренюк розглянув деякі типи T -факторизацій. Зокрема, біциклічну і півобертову факторизації. В результаті проведених досліджень ним з'ясовано і доведено необхідні і достатні умови існування T -факторизацій повного графу K_n парного порядку $n=2k$ деякими деревами. Крім того, цим математиком були



розроблені різні методи побудови певних типів T -факторизацій [13]. Також у роботі [13] А. Я. Петренюком показано, що із 106 дерев порядку 10, схематично побудованих в монографії Ф. Харарі, T -факторизації існують для 85 дерев.

З появою ЕОМ, а потім персональних комп'ютерів, значно пожвавилися і прискорилися дослідження у розглянутому напрямку теорії графів. Зокрема, з'явилися розробки методів ефективного застосування сучасної обчислювальної техніки до побудови і переліку блок-схем, реалізуючих T -факторизацій певних типів дерев та інших комбінаторних конфігурацій.

Автора зацікавило створення методів і алгоритмів розв'язування задач T -факторизації повних графів, які ґрунтуються на суто логічних математичних міркуваннях.

4.2. T -факторизація повного графу

4.2.1. Базові означення і положення

Нехай V – деяка непорожня скінченна множина, а $V^{(2)}$ – множина всіх двохелементних підмножин (невпорядкованих пар різних елементів) множини V .

Графом (неорієнтованим графом) G називається пара множин (V, E) , де E – довільна підмножина множини $V^{(2)}$ ($E \subseteq V^{(2)}$); позначається $G = (V, E)$.

Елементи множини V називаються *вершинами* графа G , а елементи множини E – *ребрами* графа G . Відповідно V називається *множиною вершин* і E – *множиною ребер* графа G .

Традиційно ребра $\{v, w\}$ записуються за допомогою круглих дужок (v, w) (іноді просто vw).

Нехай задано граф $G = (V, E)$. Якщо $(v, w) \in E$, то кажуть, що *вершини v і w є суміжними*, у протилежному разі вершини v і w є *несуміжними*. Якщо $e = (v, w)$ – ребро графа, то вершини v і w називаються *кінцями* ребра e . У цьому випадку кажуть також, що ребро e *з'єднує* вершини v і w . Вершина v і ребро e називаються *інцидентними*, якщо v є кінцем e .



Кількість ребер, інцидентних вершині, називається *степенем* цієї вершини.

Послідовність $v = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_m, v_m = w$ називається *ланцюгом* довжини m , що з'єднує вершини v і w , якщо кожен два сусідні елементи цієї послідовності інцидентні. При цьому вершини v і w такого ланцюга називаються його *кінцями*.

Циклом називається ланцюг, кінець і початок якого співпадають. Ланцюг, що має довжину 0 називається *тривіальним*.

Кількість вершин у графі називають його *порядком* і позначають n , а кількість ребер – *розміром* графу.

Два *ребра* називаються *суміжними*, якщо вони мають спільну вершину.

Існує декілька *способів* завдання графів. Одним зі способів завдання графа $G = (V, E)$ є завдання кожної з множин V і E за допомогою переліку їх елементів.

Наприклад, граф $G_1 = (V_1, E_1)$, $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ і $E_1 = \{(v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4)\}$ – це граф із чотирма вершинами і п'ятьма ребрами. А граф $G_2 = (V_2, E_2)$, $V_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ і $E_2 = \{(v_1, v_2), (v_2, v_4), (v_1, v_5), (v_3, v_2), (v_3, v_5), (v_4, v_1), (v_5, v_4)\}$ – граф із п'ятьма вершинами і сімома ребрами.

Графи можна задавати також за допомогою матриць.

Нехай всі вершини графа G занумеровано натуральними числами від 1 до n .

Матрицею суміжності A графа G називається квадратна $n \times n$ -матриця, в якій елемент a_{ij} i -го рядка і j -го стовпчика дорівнює 1, якщо вершини v_i та v_j з номерами i та j суміжні, і дорівнює 0 у протилежному разі.

В якості приклада для графів G_1 і G_2 маємо відповідно

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Очевидно, що матриці суміжності графів – симетричні.

Нехай всі вершини графа G занумеровано натуральними числами від 1 до n і всі його ребра – числами від 1 до m .

Матрицею інцидентності B графа G називається $n \times m$ -матриця, в якій елемент b_{ij} i -го рядка і j -го стовпчика дорівнює 1, якщо вершина v_i з номером i



інцидентна ребру e_j з номером j , і дорівнює 0 у протилежному разі.

Так для графів G_1 і G_2 (ребра графів занумеровано в тому порядку, в якому вони виписані вище)

$$B_1 = \begin{pmatrix} 11000 \\ 00110 \\ 10101 \\ 01011 \end{pmatrix} \text{ і } B_2 = \begin{pmatrix} 1010010 \\ 1101000 \\ 0001100 \\ 0100011 \\ 0010101 \end{pmatrix}$$

Операція видалення вершини v з графа $G=(V,E)$ полягає у видаленні з множини V елемента v , а з множини E – всіх ребер, інцидентних v .

Операція видалення ребра e з графа $G=(V,E)$ – це видалення елемента e з множини E . При цьому всі вершини зберігаються.

Граф $G=(V,E)$ називається *повним*, якщо будь-які дві його вершини суміжні (тобто $E=V^{(2)}$). Повний граф з n вершинами позначається K_n .

Граф $G_1=(V_1,E_1)$ називається *підграфом* графа $G=(V,E)$, якщо $V_1 \subseteq V$ і $E_1 \subseteq E$. Важливі класи підграфів складають підграфи, які отримуються в результаті застосування до заданого графа операції видалення вершини і/або операції видалення ребра.

Графи $G_1=(V_1,E_1)$ і $G_2=(V_2,E_2)$ називаються *ізоморфними*, якщо існує таке взаємно однозначне відображення φ множини вершин V_1 на множину вершин V_2 , що ребро $(v,w) \in E_1$ тоді і тільки тоді, коли ребро $(\varphi(v), \varphi(w)) \in E_2$. Відображення φ називається *ізоморфним відображенням* або *ізоморфізмом* графа G_1 на граф G_2 .

Таким чином, ізоморфні граfi відрізняються фактично лише ідентифікаторами (іменами) своїх вершин. З точки зору теорії графів ця відмінність не є суттєвою, тому звичайно ізоморфні граfi ототожнюють і, зображаючи граfi у вигляді діаграм, або зовсім не ідентифікують їхні вершини, або нумерують вершини натуральними числами.

Ізоморфне відображення графа G на себе називається *автоморфізмом* графа G . Автоморфізм φ графа $G=(V,E)$, при якому для кожної вершини $v \in V$ виконується $\varphi(v)=v$, називається *тривіальним автоморфізмом*.

Відомо, що граfi G_1 та G_2 ізоморфні тоді і тільки тоді, коли матрицю



суміжності (матрицю інцидентності) одного з цих графів можна одержати з матриці суміжності (матриці інцидентності) іншого графа за допомогою відповідних перестановок рядків та стовпчиків.

Справді, як було зазначено вище, ізоморфні графи G_1 і G_2 відрізняються між собою лише порядком нумерації вершин, тобто існує бієктивне відображення φ множини номерів вершин першого графа на множину номерів вершин другого. Отже, кожен елемент $a_{ij}^{(1)}$ матриці суміжності A_1 графа G_1 збігається з елементом $a_{\varphi(i)\varphi(j)}^{(2)}$ (тобто елементом, який знаходиться в рядку з номером $\varphi(i)$ і стовпчику з номером $\varphi(j)$) матриці суміжності A_2 графа G_2 . Таким чином, шляхом послідовного одночасного обміну місцями (перестановок) рядків і стовпчиків з номерами i та $\varphi(i)$ для всіх $i=1,2,\dots,n$ матрицю суміжності A_1 можна перетворити у матрицю суміжності A_2 і навпаки.

Якщо відображення φ відоме, то таке перетворення виконати неважко. У разі ж, коли потрібно перевірити за допомогою матриць суміжності, чи є ізоморфними два задані графи з n вершинами кожний, необхідно здійснити різноманітні одночасні перестановки рядків і стовпчиків однієї з них. Якщо після чергової з таких перестановок одержується матриця, яка повністю збігається з іншою, то ці графи ізоморфні. Однак, щоб в такий спосіб з'ясувати, що задані графи не є ізоморфними, потрібно виконати всі $n!$ перестановок рядків і стовпчиків. Вже для порівняно невеликих значень n здійснити цей перебір без застосування обчислювальної техніки практично неможливо. У прикладній теорії алгоритмів розробляються різноманітні алгоритми перевірки ізоморфізму графів, які для більшості графів (або окремих типів графів) дозволяють суттєво скоротити обсяг необхідних перевірок.

Для матриць інцидентності графів G_1 і G_2 з n вершинами і m ребрами кожний справедливі аналогічні міркування. Відмінність у тому, що коли G_1 і G_2 ізоморфні, тоді для їхніх множин вершин існує бієкція φ , а для множин ребер – інша бієкція ψ . Загальна ж кількість необхідних кроків для перевірки ізоморфізму графів G_1 і G_2 у цьому випадку не перевищує $n!m!$.

Очевидно, що будь-яка підстановка множини вершин повного графа K_n є



автоморфізмом цього графа. Тому кількість усіх можливих автоморфізмів графа K_n дорівнює $n!$.

4.2.2. Поняття T -факторизації

Фактором графа називається такий його підграф, множина вершин якого співпадає з множиною вершин графа.

Деревною упаковкою розміру s n -вершинного повного графу K_n називається сімейство n -вершинних дерев $T_1, T_2, \dots, T_s$, якщо:

- 1) кожне дерево T_i ($i=1, \dots, s$) має порядок n і є фактором графу K_n ;
- 2) ніякі два з цих дерев T_i, T_j не мають спільних ребер при $i \neq j$ ($1 \leq i, j \leq s$).

Деревна упаковка називається $(T_1, T_2, \dots, T_s)$ -факторизацією, або T -факторизацією повного графу K_n , якщо виконується така додаткова умова: всі компоненти упаковки ізоморфні деякому дереву T , а кожне ребро міститься в одному з дерев (компонент) T_i ($i=1, \dots, s$).

Дерева, що складають $(T_1, T_2, \dots, T_s)$ -факторизацію чи $(T_1, T_2, \dots, T_s)$ -упаковку, називаються її *компонентами*.

Таким чином, якщо k екземплярів дерева T з $n=2k$ вершинами можна так накласти одне на одне (з ототожненням вершин), що одержиться повний граф K_n , то говорять, що для цього дерева існує T -факторизація.

Отже, T -факторизація повного графу порядку n – це таке розбиття множини ребер повного графу K_n на k підмножин, кожна з яких породжує дерево (компоненту T -факторизації), ізоморфне даному дереву T порядку n .

Дерева у списках переліку представлені у стандартному вигляді.

Запис дерева у вигляді перестановки називається *стандартним*, якщо пари номерів позицій перестановки $\{ij : a_i a_j - \text{ребро дерева } T\}$, в яких стоять сусідні вершини, відповідають умовам стандартності запису – набору нерівностей. Наприклад, стандартний запис дерева

12 23 34 45 56 57 58 59 5A

обмежується умовами стандартності

$$a_6 < a_7 < a_8 < a_9 < a_{10}.$$



Запис T -факторизації вважається *стандартним*, якщо її компоненти представлені в стандартному вигляді і записані одна за одною в порядку лексикографічного зростання.

Канонічною формою T -факторизації називають лексикографічно найменший зі стандартних записів образів цієї T -факторизації, одержаних в результаті дії на неї всіх підстановок стандартної множини.

Стандартний запис являється повним інваріантом у множині T -факторизацій стандартного графу K_n відносно тотожності. Канонічна форма запису являється інваріантом, що проводить повне розрізнення T -факторизацій відносно ізоморфізму.

Задачу існування T -факторизації для заданого дерева T поставив Л. Байнеке [12], він же знайшов необхідні умови існування T -факторизації:

- 1) n – парне натуральне число, $n=2k$, і
- 2) $\Delta(T) \leq k$, де $\Delta(T)$ – найвищий із степенів вершин дерева T .

Дерево називають *допустимим*, якщо воно задовольняє умови Байнеке.

Ш. Хуанг і А. Роса [10, 11] повністю розв'язали задачу про існування T -факторизацій для парних значень $n \leq 8$. У роботі А. Я. Петренюка [12] розв'язано цю задачу у випадку $n=10$. Згідно з його дослідженнями з'ясовано, що серед 106 існуючих неізоморфних дерев порядку 10, побудованих Ф. Харарі, рівно 85 допускають T -факторизацію.

4.2.3. Необхідні умови існування T -факторизацій

Для формулювання задачі існування T -факторизацій повних графів необхідно окреслити множину T_n усіх таких дерев порядку n , що T -факторизація графу K_n існує для кожного $T \in T_n$.

Кожне допустиме дерево T визначає вектор $d(T)=(d_1, d_2, \dots, d_k)$, де d_i ($1 \leq i \leq k$) означає кількість вершин степеня i у дереві T .

Типом вершини x у T -факторизації R називається вектор $(s_1, s_2, \dots, s_k)$, де s_j ($1 \leq j \leq k$) означає кількість компонент в R , які мають степінь j у вершині x .

Можливі типи вершин можна визначити з наступних співвідношень:



$$s_1 + s_2 + \dots + s_k = k,$$

$$s_1 + 2s_2 + \dots + ks_k = n-1, (1)$$

s_j – ціле число, $s_j \geq 0$ ($j=1, 2, \dots, k$).

Через $w(n)$ в подальшому позначено число можливих типів вершин порядку n , тобто число розв'язків системи (1).

Існує 106 неізоморфних дерев порядку 10. Шляхом переліку було доведено [12], що рівно 85 з них допускають T -факторизацію.

Для $n=10$ існують точно 5 можливих типів вершин, а саме $t_1=(1\ 4\ 0\ 0\ 0)$;

$t_2=(2\ 2\ 1\ 0\ 0)$; $t_3=(3\ 0\ 2\ 0\ 0)$; $t_4=(3\ 1\ 0\ 1\ 0)$; $t_5=(4\ 0\ 0\ 0\ 1)$.

Для $n=12$, $w(12)=7$ і $t_1=(1\ 5\ 0\ 0\ 0\ 0)$; $t_2=(2\ 3\ 1\ 0\ 0\ 0)$; $t_3=(3\ 1\ 2\ 0\ 0\ 0)$;

$t_4=(3\ 2\ 0\ 1\ 0\ 0)$; $t_5=(4\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0)$; $t_6=(4\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0)$; $t_7=(5\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1)$.

Для $n=14$, $w(14)=11$, а саме $t_1=(1\ 6\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)$; $t_2=(2\ 4\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0)$;

$t_3=(3\ 2\ 2\ 0\ 0\ 0\ 0)$; $t_4=(3\ 3\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0)$; $t_5=(4\ 0\ 3\ 0\ 0\ 0\ 0)$; $t_6=(4\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0)$;

$t_7=(4\ 2\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0)$; $t_8=(5\ 0\ 0\ 2\ 0\ 0\ 0)$; $t_9=(5\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0)$; $t_{10}=(5\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0)$;

$t_{11}=(6\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1)$.

Нехай через a_j буде позначено число вершин типу t_j у факторизації R . Нехай $S=(S_{ij})$ – матриця з $w(n)$ рядками та k стовпцями, у якій i -й рядок відповідає i -му типу у R . Тоді справедливе співвідношення:

$$\vec{a} \cdot S = k \cdot d(T) \quad (2)$$

Теорема 1. Для існування T -факторизації графу K^{2k} необхідно, щоб матричне рівняння (2) мало розв'язок з невід'ємними цілими компонентами.

Ш. Хуанг та А. Роса [10,11] ввели поняття типів вершин та використали систему скалярних рівнянь еквівалентних рівнянням (1) у випадку $n=8$.

Необхідні умови існування T -факторизацій для допустимих дерев T , сформульовані А. Я. Петренюком [12] у вигляді теорем:

1) якщо допустиме дерево порядку $n=2k \geq 10$ допускає T -факторизацію, то

$$d_2 \geq d^{k-1};$$

2) якщо допустиме дерево T порядку $n=2k$, $k \geq 6$, допускає

$$T\text{-факторизацію, то } d^2 + 2d^3 \geq 2d^{k-2};$$



3) якщо допустиме дерево T порядку $n=2k$, $k \geq 8$, допускає

T -факторизацію, то $d^2 + 3d^3 + 3d^4 \geq 3d^{k-3}$.

Можна продовжити по аналогії серію необхідних умов існування T -факторизацій, знижуючи кожного разу значення індексу у правій частині нерівності на одиницю. Можна множити серії допустимих дерев, які не допускають T -факторизацій, бо не задовольняють необхідні умови.

Співвідношення (2) досить детально досліджувалося в [8] для $n=8$, а також в [12] для $n=10$. Для $n=10$ воно матиме вигляд:

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 3a_4 + 4a_5 = 5d_1,$$

$$4a_1 + 2a_2 + \dots + a_4 = 5d_2,$$

$$a_2 + 2a_3 \dots \dots \dots = 5d_3, (3)$$

$$a_4 \dots = 5d_4,$$

$$a_5 = 5d_5.$$

Неважко встановити, що визначник цієї системи дорівнює 0. Це видно з підрахунку, який встановлює лінійну залежність рядків матриці системи. Якщо позначити рядки римськими числами I, II, III, IV, V то існує така залежність:

$$4 \cdot I - II - 6 \cdot III - 11 \cdot IV - 16 \cdot V = 0$$

Ця залежність у правій частині еквівалентна такій рівності:

$$4d_1 = d_2 + 6d_3 + 11d_4 + 16d_5. (4)$$

Для $n=12$ відповідні розрахунки мають вигляд

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 3a_4 + 4a_5 + 4a_6 + 5a_7 = 6d_1,$$

$$5a_1 + 3a_2 + a_3 + 2a_4 + a_6 = 6d_2,$$

$$a_2 + 2a_3 + a_5 = 6d_3, (5) \quad a_4 + a_5 = 6d_4,$$

$$a_6 = 6d_5,$$

$$a_7 = 6d_6.$$

Рядки мають таку залежність

$$5 \cdot I - II - 7 \cdot III - 13 \cdot IV - 19 \cdot V - 25 \cdot VI = 0$$

У правій частині це еквівалентно

$$5d_1 = d_2 + 7d_3 + 13d_4 + 19d_5 + 25d_6. (6)$$

Очевидно, що системи рівнянь (3) і (5) мають розв'язок в цілих числах тоді



і тільки тоді, коли виконуються умови (4) і (6).

Визначник системи (2) дорівнює нулю, і система має розв'язок тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$(k-1)d_1 = \sum_{i=2}^k [k(i-2)+1] d_i \quad (7)$$

Виявляється, що умова (7) нічого не додає до необхідних умов існування T -факторизації, як стверджує наступна лема.

Лема 1. Умова (7) виконується для всіх допустимих дерев.

Це легко вивести з таких відомих співвідношень, які справедливі для довільного дерева:

$$d_1 + d_2 + \dots + d_{k-1} + d_k = n = 2k,$$

$$d_1 + 2d_2 + \dots + (k-1)d_{k-1} + k d_k = 2n - 2 = 4k - 2. \quad (8)$$

Якщо домножити перше рівняння на $2k-1$, а друге – на k , то одержаться рівні праві частини. Після порівняння лівих частин утвориться співвідношення (7).

Оскільки $a_i \geq 0$ в системах (3) та (5), то комбінуючи рядки в цих системах, можна отримати різні співвідношення для $d(T)$, якщо існує T -факторизація відповідного дерева T . Всі ці співвідношення наведені у монографії [12]. Але розглянуті співвідношення майже не допомагають для знаходження достатніх умов існування T -факторизацій, тому всі результати отримані за допомогою комп'ютерних розрахунків.

Для розв'язання системи (3) її зведено до такого вигляду

$$a_1 + a_2 + a_3 = 5d_1 - 5d_3 - 15d_4 - 20d_5,$$

$$4a_1 + 2a_2 = 5d_2 - 5d_4, \quad (9)$$

$$a_2 + 2a_3 = 5d_3.$$

В результаті перетворень ця система зводиться до такого рівняння

$$4a_1 + 2a_2 = 5d_2 - 5d_4 \quad (10)$$

Звідси витікає, що $d_2 \geq d_4$ і $d_2 \equiv d_4 \pmod{2}$. Підставляючи можливі значення для a_2 можна отримати a_1 , а потім і всі значення a_i , тобто розв'язок може бути не один.

Аналогічні результати можна одержати і для більших значень n , звуживши



необхідні умови.

4.2.4. Циклічний метод побудови розкладів повних графів

При розв'язуванні задачі існування велике значення мають ефективні методи побудови T -факторизацій.

Серед методів побудови розкладів головне місце займає циклічний метод та споріднені з ним методи – біциклічний та півобертовий.

T -факторизація порядку $n=2k$ називається *біциклічною*, якщо вона допускає автоморфізм, який має два незалежні цикли, кожний довжини k , тобто автоморфізм виду $\alpha = (1, 2, \dots, k) (k+1, k+2, \dots, n)$.

Такий автоморфізм називається *породжуючою підстановкою* біциклічної T -факторизації. Маючи одну з компонент, наприклад, базову компоненту C , та діючи на неї породжуючою підстановкою α деякої біциклічної T -факторизації, можна розвинути цілу T -факторизацію $\{C, C\alpha, \dots, C\alpha^{k-1}\}$.

Граф порядку n можна представити у вигляді списку його ребер. Щоб це представлення було однозначним, за множину вершин вибирають стандартну множину $\{1, 2, \dots, n\}$, або $\{0, 1, \dots, n-1\}$. Ребра записують у вигляді пар ij , де $i < j$, та розташовують їх у списку в порядку лексикографічного зростання. Такий запис графу називається *стандартним*.

Шаблон графу G – це список пар номерів ij , де $i < j$, причому пара ij належить шаблону тоді і тільки тоді, коли $a_i a_j$ являється ребром графу G .

Для забезпечення однозначності шаблонного запису графу G застосовують умови стандартності, які представляють собою систему строгих нерівностей, що визначають порядок нумерації вершин даного графу G .

Перевага шаблонного представлення графу полягає в тому, що шаблон є жорстким представленням графу, а перестановка – змінною компонентою цього представлення, за допомогою якої можна одержати представлення будь-якого графу, ізоморфного представленому шаблону. Ця перевага використовується у алгоритмах побудови та переліку T -факторизацій.

Основою алгоритму побудови біциклічної T -факторизації (*біциклічного*



методу) є такий принцип. Потрібно зафіксувати шаблон дерева T і умови стандартності. Потім пробігти у деякому порядку всі перестановки n вершин, перевіряючи кожне одержане дерево на стандартність і на біциклічність. Така послідовність дерев, яка пробігається, називається *трасою пошуку*. Біциклічні T -факторизації графу K_n одержуються з підходящої базової компоненти порядку n , де $n=2k$, під дією підстановки $(1\ 2\ \dots\ k)(k+1\ \dots\ n)$. Необхідно переглянути $n!$ перестановок, що вимагає занадто багато часу навіть при користуванні сучасним комп'ютерним обладнанням. Тому доцільним є застосування так званої стратегії стрибків, яка дозволяє “перестрибувати” через послідовності дерев, про які відомо з умов T -факторизації, що серед них немає біциклічних базових компонент.

4.2.5. Класифікація різнорозмірних деревних розкладів

У роботах [2, 5, 7-12] досліджуються розклади повних графів на підграфи різних типів, зокрема на дерева. Цікавими і змістовними виявилися дослідження існування розкладів повних графів на дерева та перелік таких розкладів з точністю до ізоморфізму. У даному підрозділі розглядаються різнорозмірні деревні розклади повних графів.

Нехай $T_1, T_2, \dots, T_{n-1}$ ($n \geq 2$) – послідовність дерев, така, що дерево T_i має розмір i ($i=1, \dots, n-1$). Сімейство підграфів $\{g_1, g_2, \dots, g_{n-1}\}$ повного графу K_n називають $(T_1, T_2, \dots, T_{n-1})$ -розкладом графу K_n у тому випадку, якщо:

- 1) кожний g_i ($i=1, \dots, n-1$) являє собою дерево, ізоморфне T_i ;
- 2) дерева g_i, g_j не мають спільних ребер при $i \neq j$ ($1 \leq i, j \leq n-1$);
- 3) $g_1 \cup g_2 \cup \dots \cup g_{n-1} = K_n$.

Описану вище послідовність $T_1, T_2, \dots, T_{n-1}$ прийнято називати *заголовком* відповідних $(T_1, T_2, \dots, T_{n-1})$ -розкладів.

Дерева $g_1, g_2, \dots, g_{n-1}$ називають *компонентами* $(T_1, T_2, \dots, T_{n-1})$ -розкладу, при цьому компоненту g_{n-1} називають *старшою*.

Зокрема, у роботі [2] А. Г'ярфас і Дж. Легель висунули гіпотезу про те, що для всякого заголовка $T_1, T_2, \dots, T_{n-1}$ існує $(T_1, T_2, \dots, T_{n-1})$ -розклад. Ними було



доведено, що ця гіпотеза вірна для заголовків, у яких тільки два дерева не є зірками. У спробах довести цю гіпотезу з'явилися нові цікаві задачі про існування розкладів подібних видів.

4.2.6. Задача про перелік деревних розкладів

Автором розглянута задача про перелік, з точністю до ізоморфізму, $(T_1, T_2, \dots, T_{n-1})$ -розкладів для певних заголовків малих порядків n .

Для зручності множину всіх $(T_1, T_2, \dots, T_{n-1})$ -розкладів можна розділити на чотири типи відповідно до типів взаємного розміщення компонент g_1 і g_2 , які визначаються класами ізоморфізму графів взаємного розміщення $g_1 \cup g_2$, зображених на рис.1.

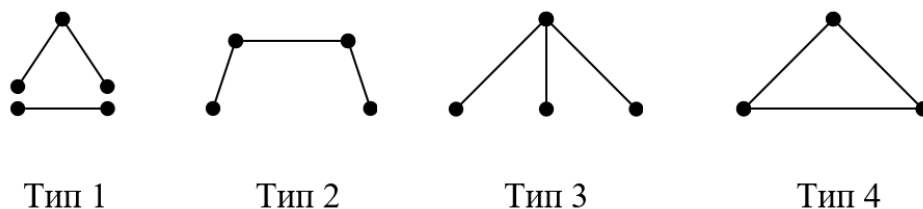


Рисунок 1 - Чотири типи $(T_1, T_2, \dots, T_{n-1})$ -розкладів

Авторська розробка

Зокрема, розглянуто задачу переліку різнорозмірних зіркових деревних розкладів [14, 15]. у випадку, коли $T_i = Z_i$ ($i=1, 2, \dots$), де Z_i – зірка з i ребрами. Зірку Z_i можна зображати у вигляді $(a) a_1 a_2 \dots a_i$, де a – центральна вершина зірки, а $a_1, a_2, \dots, a_i$ – її кінцеві вершини.

Наступна теорема розв'язує вказану задачу при всіх значеннях n .

Теорема 2. З точністю до ізоморфізму, існує єдиний $(Z_1, Z_2, \dots, Z_{n-1})$ -розклад графу K_n для кожного $n \geq 2$. Група автоморфізмів цього розкладу має порядок 2.

Доведення. Існування доводиться рекурсивною побудовою. Для $n=2$ справедливість твердження очевидна. Припускається, що воно справедливе для порядку $n-1$. Тоді існує різнорозмірний зірковий розклад графу K_{n-1} , побудованого на множині вершин $\{1, \dots, n-1\}$.

Розглядається граф K_n з множиною вершин $\{1, 2, \dots, n\}$. Нехай R – різнорозмірний зірковий розклад графу $K_{n-1} = K_n \setminus \{n\}$. Додавши до зірок розкладу



R зірку $Z_n = (n) 1 2 \dots n-1$, одержується шуканий різнорозмірний зірковий розклад графу K_n , і цим існування доведено.

Єдиність. Застосовується метод математичної індукції. У випадку $n = 2$ єдиність очевидна. Нехай $n > 2$. Припускається, що єдиність має місце для всіх порядків, менших, ніж n . Нехай, всупереч твердженню теореми, для графу K_n з множиною вершин $\{1, \dots, n\}$ існують два неізоморфні різнорозмірні зіркові розклади R_1, R_2 . Якщо це потрібно, то можна перенумерувати вершини основних графів цих розкладів так, щоб центри старших компонент сумістилися з вершиною n . Вилучивши з обох розкладів вершину n і старші компоненти, вдається одержати різнорозмірні зіркові розклади (їх позначено R_1^*, R_2^*) графу K_{n-1} . За припущенням індукції, ці розклади ізоморфні, і, значить, існує така підстановка φ , яка переводить R_1^* в R_2^* . Але тоді підстановка вершин графу K_n , яка діє на вершинах його підграфу K_{n-1} як φ і залишає на місці вершину n , переводить R_1 в R_2 , а це суперечить припущенню, що R_1 та R_2 неізоморфні. Встановлена суперечність доводить єдиність різнорозмірного зіркового розкладу графу K_n для кожного значення $n \geq 2$.

Стосовно групи автоморфізмів побудованого вище розкладу можна зауважити, що під дією довільного автоморфізму центр кожної його зірки, крім зірки Z_1 , залишається на місці. Тому автоморфізмом може бути лише підстановка $\alpha = (n-1, n)$. І вона дійсно є автоморфізмом цього розкладу, бо вершини $n-1, n$ – кінцеві вершини всіх його зірок. Теорему доведено.

Висновки

Автором наведена коротка історична довідка виникнення як поняття самого графу, так і поняття розкладу повних графів на підграфи, що в результаті призвело до узагальнення поняття розкладу повного графу на підграфи певного типу. Відзначено, що факторизації різних комбінаторних конфігурацій, і зокрема, повних графів, активно вивчаються близько останніх 50 років. В



хронологічному порядку розглянуто і проаналізовано роботи багатьох математиків, вибрано напрямки досліджень, актуальних для сучасного стану розвитку багатьох галузей навколишнього життя. Виявлено основну думку кожної з робіт, більшість з яких стали віхами на шляху формування сучасної постановки задач, що розглядаються, та підґрунтям розробки методів і алгоритмів розв'язування цих задач.

Найбільше дослідника зацікавив саме розклад на такі неізоморфні підграфи, як дерева. Відмічено, що деревні факторизації таких комбінаторних конфігурацій, як повні граfi, вимагають розв'язання широкого кола задач існування, переліку і побудови. Розглянуто циклічний метод побудови розкладів повних графів, який в подальшому використовується для побудови базових компонент T -факторизацій та їх переліку з точністю до ізоморфізму.

Для наведених чотирьох типів різнорозмірних $(T_1, T_2, \dots, T_{n-1})$ -розкладів відповідно до типів взаєморозміщення компонент g_1 і g_2 , які визначаються класами ізоморфізму графів взаєморозміщення $g_1 \cup g_2$, знайдено кількісні результати досліджень та розв'язана задача про перелік з точністю до ізоморфізму чотирьох типів $(T_1, T_2, \dots, T_{n-1})$ - розкладів на так звані зірки.