



## KAPITEL 9 / CHAPTER 9<sup>9</sup>

### MATHEMATICAL MODELING OF THE KINETICS OF SEWAGE SLUDGE DEWATERING

DOI: 10.30890/2709-2313.2025-37-01-011

#### Вступ

У всьому світі 80% стічних вод скидається неочищеними у світові водні шляхи [1]. Відсутність очищення стічних вод становить серйозну загрозу навколишньому середовищу, клімату та здоров'ю людей. Осади стічних вод (ОСВ) нагромаджуються на території очисних споруд в шламонагромаджувачах, відвалах. Мають місце їх скиди і змивання у водойми. Осади, які мають токсичні речовини, безконтрольно вивозять на мулові майданчики.

Розрахунковий обсяг свіжоутвореного осаду від очисних споруд систем централізованого водовідведення по Україні складає 338 тис. т/рік (при вологості 97 %). Загальний об'єм ОСВ, накопичених на спорудах очищення стічних вод в Україні наразі невідомий, але за приблизною експертною оцінкою він може становити від 50 до 80 млн. м<sup>3</sup> [2].

Великі об'єми утворюваних і накопичуваних упродовж десятиліть ОСВ на українських КОС становлять серйозну загрозу для довкілля. Починаючи з 2016 р., в країнах Євросоюзу заборонено складування ОСВ, тобто мулові майданчики вже не можна використовувати для зневоднення ОСВ [3].

Основними методами обробки осадів стічних вод є їх ущільнення, стабілізація [4], кондиціювання [5], зневоднення [6], термічне сушіння [7] та спалювання [8].

Зневоднення ОСВ має важливе значення для управління мулом. Це пов'язано зі зменшенням об'єму осаду і, відповідно, витрат на транспортування. Крім того, зневоднений осад набагато легше переробляти. Тим не менш, зневоднення осаду продовжує залишатися одним із найдорожчих і найбільш вимогливих процесів на очисних спорудах [9].

---

<sup>9</sup>Authors: Verbovskyi Orest, Orel Vadym

Number of characters: 14355

Author's sheets: 0,36



## 9.1. Методи зневоднення осадів стічних вод

Зневоднення осадів стічних вод зазвичай здійснюється за допомогою стрічкових фільтр-пресів або центрифуг. Здатність видаляти воду з осадів шляхом механічного зневоднення є властивістю як осадів, так і обладнання, що використовується для зневоднення. Новіші центрифуги з високим вмістом твердих речовин можуть видалити більше води, ніж стрічковий прес, але вимагають більшої дози хімічного кондиціонування.

Преси зазвичай використовуються серед механічних пристроїв, і їхня робота полягає у віджиманні води з мулу, як правило, за допомогою фільтрації. Процес вимагає якісної підготовки шламів з точки зору формування опору стиску. Зневоднення осаду зазвичай виконується за допомогою таких фільтраційних пресів: стрічкових пресів, рамних пресів і мембранних пресів [10].

Зневоднення можна розглядати як двоетапний процес, фільтрація з наступним віджиманням. Етап експресії є найважливішим із них, і переваги різних методів обробки осаду та типів хімічних речовин для кондиціонування залишаються плідною областю досліджень [11].

Фільтрація та віджим є найдешевшими операціями зневоднення, тому бажано видалити максимально можливу кількість води шляхом механічного зневоднення. Високий вміст сухої речовини 35-40% вже може бути досягнутий при тиску 300-400 кПа та оптимальних умовах флокуляції; однак при тиску 6...10 МПа може бути досягнуто вміст сухої речовини 60% [12].

Зневоднювальна здатність осаду широко пов'язана з когезією флокульованої матриці та наявністю дрібних часток. Обидві обробки змінюють флокуляцію матриці та вивільняють дрібні частинки. Вивільнення дрібних часток має тенденцію засмічувати як фільтраційний осад, так і фільтраційний осад фільтруюче середовище. Відповідно, швидкість фільтрації зменшується через більший опір потоку. З іншого боку, руйнування полімерної матриці дає змогу вивільнити частину води, що потрапила в пластівці, до основної рідкої фази і, таким чином, полегшити її видалення, що, як правило, зменшує вміст



вологи в осадку на фільтрі. Це також впливає на стадію компресійного зневоднення. Більш зруйновані структури призводять до менш еластичних коржів і, таким чином, повільнішої первинної стадії консолідації. Навпаки, рухливість розбитих агрегатів у фільтраційному осадку, здається, не покращується завдяки зменшенню розміру (кінетика вторинної стадії консолідації істотно не змінюється) [13].

Частинки в подачі мулу сильно взаємодіють одна з одною, запобігаючи осіданню та створюючи значний опір фільтрації та стисненню. Це призводить до необхідності, щоб сили зневоднення були стискаючими, прикладеними безпосередньо до з'єднаної твердої фази; іноді сили зсуву можуть сприяти зневодненню. Конструкції фільтраційного обладнання, які найбільше підходять для зневоднення осаду, розвинулися відповідно до властивих характеристик осаду, найважливішими з яких є їх стисливість і дрібні частинки, що призводить до утворення кеків із надзвичайно високим вмістом твердих речовин, близьких до фільтруючого середовища. Таким чином, мембранний пластинчастий прес, стрічковий фільтр і декантерна центрифуга стали найпоширенішими машинами для зневоднення осаду. Фільтр-преси, як правило, дають сухіші тверді речовини, але рівень сухості залежить від властивостей осаду. Ті самі властивості корму диктують необхідність попередньої хімічної обробки для забезпечення найвищої швидкості зневоднення та найкращої прозорості фільтрату, і правильний вибір фільтрувальної тканини також має вирішальне значення в цьому відношенні [14].

## 9. 2. Методи моделювання

Здатність осадів стічних вод стискуватися під дією зовнішнього тиску є однією з характерних його властивостей [15]. Швидкість, м/с, фільтрування осадів стічних вод [16]

$$q = f(G, e, W, \mu, t, p, h), \quad (1)$$

де  $G$  – модуль стиснення осаду, Па;  $e$  – коефіцієнт пористості осаду;



$W$  – вологість осаду;  $\mu$  – динамічна в'язкість фільтрату, Па·с;  $t$  – тривалість фільтрування, с;  $p$  – тиск рідини в порах осаду, Па;  $h$  – товщина шару осаду, м.

Перепишемо функціональну залежність (1) у вигляді

$$\varphi(q, G, e, W, \mu, t, p, h) = 0. \quad (2)$$

Проведемо моделювання двома методами.

**1. Метод розмірностей.** Залежність (2) має  $n = 8$  змінних. Для знаходження цієї функціональної залежності використаємо  $\pi$ -теорему. Якщо ці  $n$  змінних можуть бути виражені через  $m$  основних розмірних одиниць, то їх можна згрупувати в  $(n - m)$  безрозмірних комплексів  $\pi$ .

Для механічних процесів, наприклад,  $m = 3$  – незалежні величини з розмірностями маси ( $M$ , кг), довжини ( $L$ , м), часу ( $T$ , с). Тоді  $n - m = 8 - 3 = 5$ . Розмірності  $[q] = LT^{-1}$ ;  $[G] = ML^{-1}T^{-2}$ ;  $[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$ ;  $[p] = ML^{-1}T^{-2}$ ;  $[h] = L$ .

Розмірності шуканих параметрів відносно незалежних величини наведено в (табл.1).

**Таблиця 1 - Розмірність шуканих параметрів**

| Параметри<br>Величини | $q$ | $G$ | $e$ | $W$ | $\mu$ | $t$ | $p$ | $h$ |
|-----------------------|-----|-----|-----|-----|-------|-----|-----|-----|
| $M$                   | 0   | 1   | 0   | 0   | 1     | 0   | 1   | 0   |
| $L$                   | 1   | -1  | 0   | 0   | -1    | 0   | -1  | 1   |
| $T$                   | -1  | -2  | 0   | 0   | -1    | 1   | -2  | 0   |

За основні параметри вибрано  $q$ ,  $G$ ,  $\mu$ . Правильність вибору цих параметрів перевіримо за визначником  $\Delta$ , що складається з їх розмірностей [17]:

$$\Delta = \begin{vmatrix} q & G & \mu \\ M & & \\ L & & \\ T & & \end{vmatrix} \quad (3)$$

При цьому має бути  $\Delta \neq 0$ . Отже,



$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Тому залежність (2) можна замінити такою:

$$\varphi(\pi_1, \pi_2, \pi_3, e, W) = 0 \quad (4)$$

Тут комплекси

$$\pi_1 = q^{\alpha_1} \cdot G^{\beta_1} \cdot \mu^{\gamma_1} \cdot t;$$

$$\pi_2 = q^{\alpha_2} \cdot G^{\beta_2} \cdot \mu^{\gamma_2} \cdot p;$$

$$\pi_3 = q^{\alpha_3} \cdot G^{\beta_3} \cdot \mu^{\gamma_3} \cdot h.$$

Показники степенів  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$  визначають з умови, щоб комплекси  $\pi$  були безрозмірними.

Враховуючи, що розмірності обох частин комплексу  $\pi$  однакові, замінимо всі величини в ньому розмірностями цих величин. Так, для комплексу  $\pi_1$

$$M^0 \cdot L^0 \cdot T^0 = (L \cdot T^{-1})^{\alpha_1} \cdot (M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2})^{\beta_1} \cdot (M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1})^{\gamma_1} \cdot T.$$

Щоб комплекси  $\pi$  були безрозмірними, необхідно щоб сума показників степенів для кожної розмірності дорівнювала нулю. Тому отримано систему з трьох рівнянь з трьома невідомими  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$ :

Для комплексу  $\pi_1$  складемо відповідні рівняння для розмірності маси (М), довжини (L), часу (Т):

$$\begin{cases} 0 = \beta_1 + \gamma_1 \\ 0 = \alpha_1 - \beta_1 - \gamma_1 \\ 0 = -\alpha_1 - 2\beta_1 - \gamma_1 + 1 \end{cases}.$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо  $\alpha_1 = 0$ ;  $\beta_1 = 1$ ;  $\gamma_1 = -1$ . Отже, комплекс

$$\pi_1 = q^0 \cdot G^1 \cdot \mu^{-1} \cdot t = \frac{G \cdot t}{\mu}.$$

Аналогічно для комплексу  $\pi_2$ :

$$M^0 \cdot L^0 \cdot T^0 = (L \cdot T^{-1})^{\alpha_2} \cdot (M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2})^{\beta_2} \cdot (M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1})^{\gamma_2} \cdot (M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2})$$



$$\begin{cases} 0 = \beta_2 + \gamma_2 + 1 \\ 0 = \alpha_2 - \beta_2 - \gamma_2 - 1 \\ 0 = -\alpha_2 - 2\beta_2 - \gamma_2 - 2 \end{cases}.$$

Отже,  $\alpha_2 = 0$ ;  $\beta_2 = -1$ ;  $\gamma_2 = 0$ ;

$$\pi_2 = q^0 \cdot G^{-1} \cdot \mu^0 \cdot p = \frac{p}{G}.$$

Аналогічно для комплексу  $\pi_3$ :

$$M^0 \cdot L^0 \cdot T^0 = (L \cdot T^{-1})^{\alpha_3} \cdot (M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2})^{\beta_3} \cdot (M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1})^{\gamma_3} \cdot L$$

$$\begin{cases} 0 = \beta_3 + \gamma_3 \\ 0 = \alpha_3 - \beta_3 - \gamma_3 + 1 \\ 0 = -\alpha_3 - 2\beta_3 - \gamma_3 \end{cases}.$$

Отже,  $\alpha_3 = -1$ ;  $\beta_3 = 1$ ;  $\gamma_3 = -1$ ;

$$\pi_3 = q^{-1} \cdot G^1 \cdot \mu^{-1} \cdot h = \frac{G \cdot h}{q \cdot \mu}.$$

Залежність (4) набуває вигляду:

$$\Phi\left(\frac{G \cdot t}{\mu}, \frac{p}{G}, \frac{G \cdot h}{q \cdot \mu}, e, W\right) = 0. \quad (5)$$

2. Метод лінійних пропорційностей. Не враховуючи безрозмірних величин, складемо із залежності (2) лінійні пропорційності з лінійними розмірностями, тобто з розмірностями довжини (L, м). При цьому загальна кількість лінійних пропорційностей складатиме [18, с.132]:

$$K = 0,5 \cdot (n - l - 2) \cdot (n - l - 1) + l, \quad (6)$$

де  $n$  – загальна кількість величин, яка входить у залежність (2),  $n = 6$ ;  
 $l$  – кількість величин з лінійними розмірностями в залежності (2),  $l = 1$ ,

$$K = 0,5 \cdot (6 - 1 - 2) \cdot (6 - 1 - 1) + 1 = 7.$$

Отже,

$$\Psi\left(\frac{q \cdot \mu}{G}, \frac{q \cdot \mu}{p}, \frac{G \cdot q \cdot t^2}{\mu}, \frac{p \cdot q \cdot t^2}{\mu}, \frac{G \cdot h \cdot t}{\mu}, \frac{p \cdot h \cdot t}{\mu}, q \cdot t, h, e, W\right) = 0. \quad (7)$$



Перейдемо до чисел подібності:

$$\Psi\left(\frac{q \cdot \mu}{G \cdot h}, \frac{q \cdot \mu}{p \cdot h}, \frac{G \cdot q \cdot t^2}{\mu \cdot h}, \frac{p \cdot q \cdot t^2}{\mu \cdot h}, \frac{G \cdot t}{\mu}, \frac{p \cdot t}{\mu}, \frac{q \cdot t}{h}, e, W\right) = 0 \quad (8)$$

Це рівняння містить надлишкову інформацію. Щоб звільнити його від зайвих членів, проведемо комбінацію чисел подібності:

1. Перше та друге числа, а також третє та четверте числа та п'яте та шосте числа відрізняються лише величинами  $G$  та  $p$ . Тому залишимо перше, третє та

п'яте числа, а зв'язок між величинами  $G$  та  $p$  запишемо у вигляді симплексу  $\frac{p}{G}$ .

2. Поділимо  $\frac{G \cdot q \cdot t^2}{\mu \cdot h}$  на  $\frac{q \cdot t}{h}$ , отримаємо  $\frac{G \cdot t}{\mu}$ . Але таке число вже є, тому

можна прибрати число  $\frac{G \cdot q \cdot t^2}{\mu \cdot h}$  та в подальшому його не розглядати.

3. Помножимо числа  $\frac{G \cdot t}{\mu}$  та  $\frac{q \cdot \mu}{G \cdot h}$ , отримаємо число  $\frac{q \cdot t}{h}$ . Тому прибираємо

число  $\frac{q \cdot \mu}{G \cdot h}$ , але, якщо треба, його можна отримати комбінацією чисел  $\frac{q \cdot t}{h}$  та  $\frac{G \cdot t}{\mu}$ .

Після перетворень отримаємо

$$\theta\left(\frac{G \cdot t}{\mu}, \frac{p}{G}, \frac{q \cdot t}{h}, e, W\right) = 0 \quad (9)$$

Залежності (5) та (9) відрізняються третіми числами подібності:  $\frac{G \cdot h}{q \cdot \mu}$  та  $\frac{q \cdot t}{h}$ . Число  $\frac{G \cdot h}{q \cdot \mu}$  можна розглядати як відношення сил пружності  $[F_c] = E \cdot L^2$

та в'язкості  $[F_v] = \mu \cdot V \cdot L$  [19, с. 45]:



$$\frac{[F_c]}{[F_v]} = \frac{E \cdot L}{\mu \cdot V}, \quad (10)$$

де  $L$  – характерна довжина;  $V$  – швидкість;  $\mu$  – динамічна в'язкість,  $E$  – модуль

стиску. Але, число  $\frac{G \cdot h}{q \cdot \mu}$  можна отримати комбінацією чисел  $\frac{q \cdot t}{h}$  та  $\frac{G \cdot t}{\mu}$ . Тому залежності (5) та (9) вважатимемо однаковими.

Перепишемо (9) як

$$\frac{q \cdot t}{h} = \phi \left( \frac{G \cdot t}{\mu}, \frac{p}{G}, e, W \right). \quad (11)$$

Число подібності  $\frac{q \cdot t}{h}$  є аналогом критерію гомохронності [20, табл.1]

$$Ho = \frac{V \cdot t}{L}, \quad (12)$$

який має фізичний зміст як характеристика нестационарної течії рідини [21, с.405]. Цей критерій можна розглядати як відношення додаткової (локальної) сили, викликаній неусталеним характером руху потоку, до сили інерції [20, с.132].

## Висновки

Моделювання методами розмірностей та лінійних пропорційностей дозволило отримати однакову функціональну залежність.

Для отримання формули за цією залежністю необхідно провести фізичне моделювання зі зневоднення осадів стічних вод.