



KAPITEL 1 / CHAPTER 1¹

ELEMENTS OF FRACTURE MECHANICS OF SURFACE LAYERS IN THE INTERACTION OF PARTS RESULTING FROM THE ELASTIC-PLASTIC AND BRITTLE BEHAVIOR OF MATERIALS

DOI: 10.30890/2709-2313.2025-37-01-016

Аналіз виконаних досліджень і публікацій.

Відомо [1], що при поздовжньому пружному деформуванні контактуючих тіл і їх коливаннях ділянки під штампом отримують поздовжні пружні переміщення $y(x, t)$. При цьому в силу нерозривності деформацій ділянок балки-смужки l_1 , l_2 (рисунок 1) поздовжнє прямолінійне переміщення ділянки l_1 викликає хвильову деформацію і стиснення ділянки балки-смужки l_2 . Формально при деформуванні і пружних коливаннях плоских перерізів поверхневих шарів ділянки l_1 , ділянка l_2 отримує депланацію плоских перерізів поверхневих шарів, причому деформована поверхня є хвилястою, і ця хвилястість може бути залишковою [1]. Отже, при впливі навантаження T на ділянках l_1 і l_2 поведінка одного і того ж матеріалу балки-смужки може бути різною (на різних ділянках). На ділянці l_1 під впливом зусилля T балка-смужка знаходиться в зоні розтягування і коливання ділянки будуть, в основному, пружними (при дуже малому демпфуванні). На ділянці l_2 , через залишкові деформації, поведінка балки-смужки стає пружно-пластичною або в'язкопружною (нелінійно-пружною). Тобто деформації в межах ділянки l_1 є пружними (де напруження не перевищують межу пропорційності $\sigma_{\text{пц}}$), і ці напруження не є небезпечними. Інша справа на ділянці l_2 , напруження в межах ділянки, за критеріями пружного завдання, не є небезпечними, але фактично вони призводять до залишкових деформацій і мікронерівностей (вторинних) поверхневих шарів матеріалу деталі.

¹Authors: Malinovskiy Yu. O., Vlasenkov D. P., Sytnyk S. O., Sytnyk S. M., Rybak D. P., Oliinyk S. Yu.

Number of characters: 56656

Author's sheets: 1,41

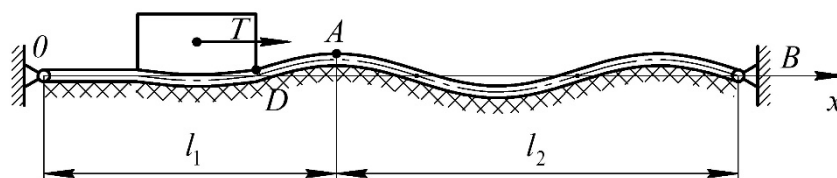


Рисунок 1 - ...

Отже, залишається вірним уявлення, що закон Гука в такій формі

$$\sigma_x = E \varepsilon_x, \quad (1)$$

не відповідає реальній поведінці матеріалу деталі, оскільки на ділянці l_2 не зберігається пряма пропорційність між σ_x та ε_x . Отже, в певному сенсі, замість закону Гука має місце його нелінійний аналог. Щоб компенсувати цей недолік закону Гука в ряді випадків використовують поняття про змінний модуль пружності (дотичний модуль) або користуються уявленням про приведений модуль [2].

У разі виконання розрахунків на міцність коротких (поверхневих і підповерхневих шарів) деталей використовують канонічні формули Гука і Ейлера. Зважаючи на те, що розглянуте фізичне стан відповідає лінійній поведінці матеріалів, наприклад, не витримується пропорційність між σ_x і ε_x . Розглянуті закони часто застосовуються, але мають суттєві обмеження, і як альтернативні закони використовують закони, зовні схожі на закони Гука і Ейлера, тільки замість модуля пружності E_c (і інших коефіцієнтів) застосовують їх аналоги.

При застосуванні законів Гука і Ейлера слід враховувати той факт, що в процесі взаємодії деталей і їх притирання фізичні характеристики притирання шарів змінюються по висоті шару (це стосується і модуля пружності), тому, розглядаючи результати проведених досліджень інших авторів, можна лише частково дати відповідь, яким із наведених модулів пружності буде прийнятно користуватися при розрахунках на міцність балок-смуг. Такий модуль, вочевидь, може бути представлений деякою змінною величиною, що залежить від висоти шару і може бути отриманий при виконанні додаткових досліджень, що є складним завданням.

Зазначимо, що на ділянці l_2 під дією дотичного зусилля T відбувається



процес стиснення ділянки, довжина якої, як і довжина напівхвилі деформації визначені в роботі [3]. Розглянута ділянка l_2 балки-смуги зазнає деформацій центрального та ексцентричного стиснення і тому може втратити поздовжню стійкість. Виходячи з автоколивань ділянки l_1 при дотриманні положень лінійної теорії тертя Е. Адіровича і Д. Блохінцева деформації балки-смуги є пружними при незначному демпфуванні, втрати на дисипацію енергії компенсуються за рахунок зовнішнього джерела енергії руху деталі.

Під час переходу штампа до ділянки l_2 і досягненні навантаженням T свого критичного значення T^{**} балка-смуга може перейти в нестійкий стан, в результаті наближення напруження $\sigma_x(\tau_x)$ балки-смуги до межі пропорційності $\sigma_{\text{пц}}$. При цьому балка-смуга, незважаючи на наявність пружного підґрунтя і поздовжніх зв'язків між шарами анізотропного матеріалу деталі, отримає хвилеподібні деформації, тобто при втраті поздовжньої стійкості (і після) балка-смуга перебуватиме поза межами застосовності канонічного закону Гука. У цьому випадку закон Гука може бути апроксимований у вигляді нелінійної залежності напруження від деформації [4]

$$\sigma_x = E \varepsilon_x^n, \quad (2)$$

де n – степеневий показник $n < 1$, визначається експериментальним шляхом.

Формула (2) запропонована Н. Х. Арутюняном для того, щоб скористатися законом Гука в канонічній формі (при цьому $n = 1$), у ряді випадків використовують уявлення про дотичний модуль

$$E^* = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}, \quad (3)$$

і поняття про приведені модуль E^{**} [5]. Зазначимо, що при розрахунку балок-смуг на стійкість використовують поняття гнучкості стрижня (балки-смуги) [4]

$$\lambda^* = \frac{l_2}{i}, \quad (4)$$

де i – радіус перетину балки-смуги.

Як впливає з спостереження за роботою підкріплених балок, при



збільшеній жорсткості пружної основи приріст гнучкості балки збільшується. Тому вводимо припущення, що приріст гнучкості збільшується пропорційно жорсткості пружної основи та обернено пропорційно модулю пружності зовнішнього шару E_c .

Звертаючись до поняття гнучкості балки-смуги, підкріпленої поперечними зв'язками, в результаті спостережень робимо висновок, що зі збільшенням жорсткості пружної основи гнучкість балки-смуги знижується. Для визначення гнучкості балки-смуги, підкріпленої поперечними зв'язками, використовуємо формулу

$$\lambda^{**} = \lambda^* - \Delta\lambda^*, \quad (5)$$

де λ^* – геометрична гнучкість балки-смуги без поперечних зв'язків ($\lambda^* = \frac{l_2}{i}$), l_2 – довжина ділянки балки попереду діючого штампа (ділянки хвилоутворення), i – радіус інерції перетину балки-смуги ($i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{F}}$), I_{min} – мінімальний момент інерції балки-смуги, F – площа поперечного перерізу балки-смуги.

При визначенні гнучкості балки-смуги, підкріпленої пружною основою, вводимо припущення про те, що гнучкість балки-смуги зменшується пропорційно збільшенню $\Delta\lambda^*$

$$\Delta\lambda^* = \frac{\beta}{E_c}, \quad (6)$$

де β – жорсткість пружної основи ($[\beta] = \text{Па або МПа}$), E_c – модуль пружності поверхневого шару деталі ($[E_c] = \text{Па або МПа}$).

Розглянута тенденція та запропонована формула (5) потребують експериментальної перевірки, і для отримання достовірних результатів розрахунків необхідно вводити поправочні коефіцієнти, обґрунтовані даними дослідів.

Звернімося до деяких нестандартних модулів. Як приклад розглянемо:

E^* – дотичний модуль пружності, що являє собою змінну величину, залежну від напруження $\sigma_{кр}$ при якому відбувається втрата стійкості балки-смуги. Для визначення модуля пружності у формулі Ейлера часто використовують формулу



приведеного модуля пружності Т. Кармана [2].

$$E^{**} = \frac{4EE^*}{(\sqrt{E} + \sqrt{E^*})^2}, \quad (7)$$

де E – модуль пружності за Ейлером, E^* – дотичний модуль пружності.

Для деяких випадків розшарування механічних властивостей матеріалу деталей по висоті зміцненої смуги деталі пропонуємо використовувати аналіз закону Гука у вигляді

$$\sigma_x = E^v \varepsilon_x, \quad (8)$$

де v – деякий змінний по висоті шару коефіцієнт зміни модуля ($v \leq 1$ визначається експериментально).

Коефіцієнт v може бути рекомендований при використанні формули Ейлера.

Виконуючи розрахунки стійкості стрижнів, стійок і балок-смуг багато дослідників вважають, що поздовжній вигин і втрата стійкості балки-смуги відбувається в зоні пружно-пластичної деформації. Так Ф. Р. Шенлі, розглядаючи пружно-пластичний поздовжній вигин (поряд з Т. Карманом та Ф. Енгессером), зазначив, що інтенсивне збільшення прогинів (і руйнування) стрижня починається не з критичної сили, визначеної за теорією приведенного модуля, а вже при силі, обчисленій за дотичним модулем.

Як було показано, на етапі розвитку фрикційних автоколивань на майданчику контакту двох взаємодіючих деталей мають місце пружні коливання, при дуже незначному розсіюванні енергії коливань. Це означає, що фактично відбувається консервативний процес і не виявляються пластичні деформації. Водночас, при дії навантаження T на ділянку l_2 , попереду рухомого штампа мають місце два паралельні процеси:

1. Процес відбувається в періоди, коли взаємодіючі деталі недостатньо притерті і матеріали обох деталей мають початкову структуру без прояву ефекту наклепу. При цьому в пружних матеріалах деталей у разі досягнення напружень у балках-смугах $\sigma_x \geq \sigma_{пц}$ відбудеться втрата поздовжньої стійкості балки-смуги (однієї з них чи обох). Що супроводжується зміною початкової форми



поверхневого шару матеріалу деталі з плоскої на хвилеподібну. Тобто матеріал балки-смуги з пружного стану переходить у пластичний. У разі втрати стійкості має місце пружно-пластичний вигин, це є проявом нелінійного закону Гука.

2. У випадку, коли деталі отримують багатократну поверхневу притирку, то поверхневий шар матеріалу отримує значне зміцнення (рисунок 2). Матеріал поверхневого шару стає крихким, це свідчить про те, що втрата поздовжньої стійкості шару може не відбутися, а відбудеться його крихкий злам з утворенням мікротріщин у точках максимальних опуклостей підповерхневих пружно-пластичних шарів у зоні «течії». Непрямо про це свідчать діаграми розтягування – стиснення матеріалу до появи зміцненого поверхневого шару та після нього (рисунок 2).

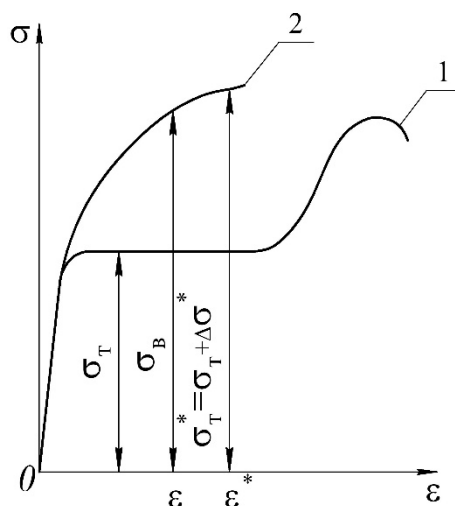


Рисунок 2 – Діаграми розтягування – стиснення:

1 – діаграма для матеріалу у стані поставки; 2 – діаграма поверхневого шару матеріалу після тривалої притирки та зміцнення (відповідно до закону нелінійної пружності): σ_T – межа текучості матеріалу 1; σ_B – межа міцності матеріалу 2 (σ_B^* руйнівне напруження); ϵ^* – руйнівна деформація матеріалу 2 (для матеріалу 1 ϵ^* – робоча деформація після втрати стійкості шару); $\Delta\sigma^*$ – приріст напруження для матеріалу 2

Як зазначено у [5], теорії міцності зберігають практичне значення для технічних розрахунків деталей машин. Цей підхід також застосовується для розрахунків зносостійкості деталей машин, якщо враховувати хвильові



деформації деталей на їх контактних поверхнях. У цьому випадку, як зазначено у [5], руйнуванню тіл передують перехід матеріалів деталей у пластичний стан, що свідчить про утворення гофр на площині взаємодії (циклічної) деталей, причому ці деформації, у ряді випадків, є залишковими. Зауважимо, що зношування поверхонь деталей відбувається після багаторазової взаємодії (циклічної) деталей. В результаті такої взаємодії поверхневих шарів їх механічні показники, зокрема межа міцності σ_B , межа витривалості σ_{-1} , твердість HRC, зносостійкість і модуль пружності підвищуються. Щоб проілюструвати ці зміни, розглянемо діаграму розтягування – стиснення для пластичного та крихкого станів даного матеріалу (в координатах σ_x, ϵ_x), то при стисненні зовнішніх шарів матеріалу попереду рухомого штампу, підповерхневий шар, перебуваючи в пружно-пластичному стані, втрачає поздовжню стійкість і отримує залишкові деформації (ϵ_x^*) в гофрованій (хвилеподібній) поверхні, при цьому стан такого підповерхневого шару металу буде відповідати межі текучості матеріалу σ_T . Розглянутий поверхневий шар, як зміцнений (після певного періоду приробки), при одній і тій самій деформації ϵ_x^* цей шар матеріалу сприймає більші навантаження і в матеріалі виникають критичні напруження (близькі до межі міцності матеріалу). Це призводить до появи поверхневих тріщин і крихкого руйнування зміцненого зовнішнього шару металу в місцях утворення амплітудних значень хвильових деформацій (зовнішнього шару деталі). Використовуючи термінологію Гріффітса [5], у поверхневому шарі матеріалу виникають мікротріщини, механізм утворення яких розкрито на гребенях деформаційних хвиль поверхневих і підповерхневих шарів матеріалу деталі. Тобто матеріал поверхневих шарів деталі після приробки, замість початкових пружно-пластичних властивостей, набуває властивостей більш твердого, міцного та крихкого матеріалу, який після досягнення певного порогового нормального (або дотичного) напруження одразу буде руйнуватись без подолання майданчика текучості (який не буде яскраво виражений на діаграмі $\sigma_x \sim \epsilon_x$, рисунок 2). Інакше, замість втрати стійкості і зміни форми зовнішнього шару, деталь набуде крихкої форми руйнування в межах зміцненого шару без



зміни форми або формоутворення (рисунок 3, 4). Розлом поверхневого шару в межах однієї півхвилі деформації обумовлений наявністю місцевих тріщин і подальших руйнувань. Розглянутий механізм крихкого руйнування є механізмом крихкого поверхневого тріщиноутворення, місцевого руйнування і розвитку місцевого зносу. Тобто поверхневий шар металу отримує ймовірніше місцеве висипання (рисунок 4). Цей процес на багатоцикловому рівні буде спрямований поки на часткове (ймовірніше) зношування (руйнування) мінімального за товщиною поверхневого шару (порядку висоти деформаційної мікронеровності) матеріалу деталі. Утворені у порядку виникнення і руйнування деформаційні мікронеровності, мікровиступи і мікровпадини будуть у процесі приробки до отримання новоутвореної плоскої поверхні (рисунок 3). На місці зруйнованих гофрів поступово йтиме процес приробки на зношуваний поверхні до отримання на зношуваних поверхнях нових зазорів, які можуть перевищувати допустимі їх значення.

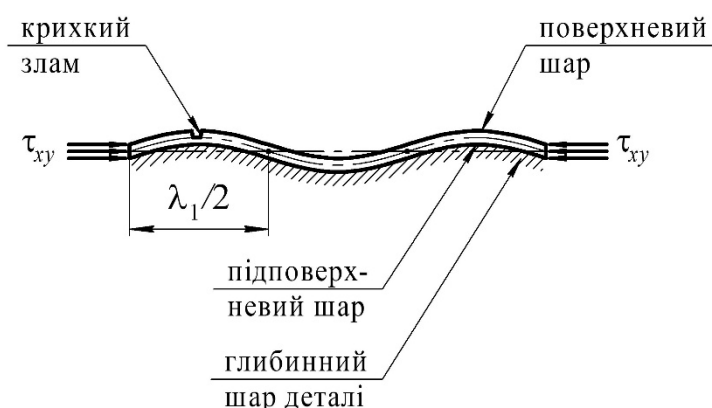


Рисунок 3 – Механізм крихкого руйнування поверхневих шарів деталі при хвилеподібних деформаціях (ефект руйнування деформаційних мікронеровностей): λ_1 – Довжина хвилі деформації

Таким чином відбувається процес зношування і руйнування деталей в результаті їх взаємного циклічного взаємодії, деформаційного утворення мікротріщин на гофрованій поверхні та її часткового або повного зрізання.

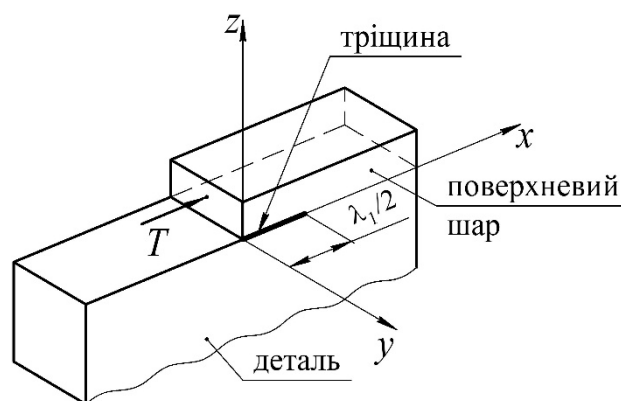


Рисунок 4 – До оцінки крихкого руйнування елемента деформаційної хвилі: T – дотичне зусилля; λ_1 – довжина хвилі деформації

Ціллю роботи є обґрунтування передумов механізму зносу деталей в результаті тріщиноутворення та крихкого руйнування шарів як багатошарового матеріалу при їх поверхневому зміцненні та наклепі.

Виклад основного матеріалу. При взаємодії різноманітних пар тертя розрахункову схему задачі можна розглядати як взаємодію короткого штампа та подовженої деталі. Як практичні приклади таких фрикційних пар можуть бути розглянуті: котяче колесо (ролик) по рейках залізничного полотна, прокладених через шпали на піддатливій основі; або ходовий гвинт механізму подачі токарного верстата (подовжена деталь) та ходова гайка-штанп. Як інші аналогічні приклади таких фрикційних пар можна навести пари: циліндр і поршень пневмоударних механізмів; поршнева система з циліндрами компресорів (або двигунів внутрішнього згоряння). Так поршень машини може бути представлений у вигляді штампа, а стінки циліндра – у вигляді направляючої (балки-смуги). При навантаженні цих (і їм подібних) фрикційних пар, в процесі руху штампа між стінками деталей виникають нестационарні сили тертя, які діють на поверхневі шари деталей (балок-смуг). У місцях взаємодії деталей (на їх поверхневих шарах) прикладаються розподілені дотичні зусилля, які відповідають нестационарній характеристиці тертя (що залежить від швидкості прослизання деталей у часі). Ці нестационарні зусилля, відповідно до характеристики тертя, мають ділянки з негативним демпфуванням (лінійна



ділянка) і ділянку з нелінійним тертям, пропорційним кубу швидкості прослизання деталей [5]. Виходячи з функціонального призначення кожної пари тертя, дана система є рухомою, що переміщується зі швидкістю руху деталі (або відносною швидкістю руху). Якщо абстрагуватися від макромоделі тертя [5], то взаємодіючі поверхні стикаються за рахунок ударів численних геометричних мікронерівностей на обох деталях. Утворені зв'язки мають малу міцність, і в результаті взаємодії мікронерівностей, протягом дуже короткого часу, відбувається руйнування «мостиків» зварювання [6]. У момент захоплення мікронерівностей швидкість взаємного зміщення знижується, через частки секунди міцність захоплення мікронерівностей і швидкість відносного руху деталей збільшується.

Внаслідок цього мають місце взаємні коливання фрикційної пари без наявності коливального джерела енергії. Таким чином, енергія цих автоколивань є трансформованою енергією рухомих деталей. Зауважимо, що частота виникаючих автоколивань співпадає з власною частотою коливань рухомих деталей (рисунок 5).

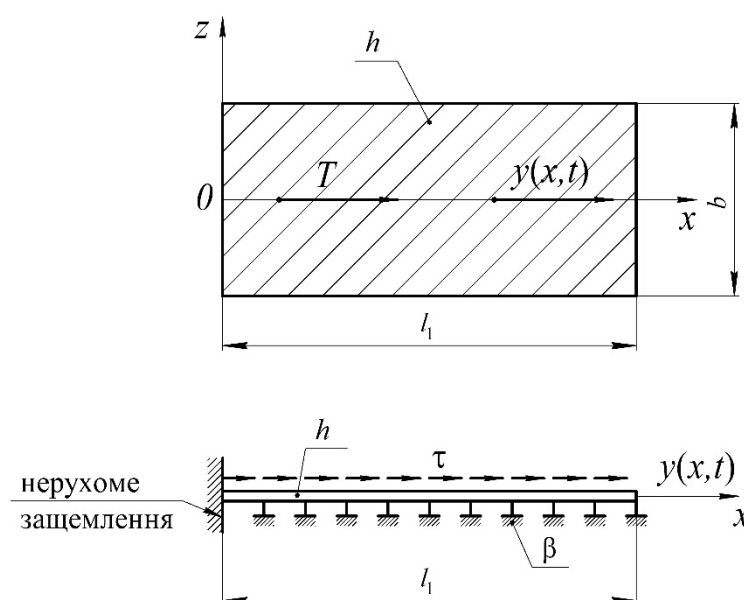


Рисунок 5

В подальшому викладі врахуємо, що автоколивання площадки контакту відбуваються в пружній області. Частина енергії руху штампа або рухомої деталі



при збудженні незатухаючих коливань (як для консервативної системи) йде на підтримання коливань, інша не врахована частина енергії йде на непружні втрати. Вплив непружних властивостей металу проявляється тільки при втраті пружним поверхневим шаром поздовжньої стійкості.

Автоколивання, в межах площадки контакту, фактично відбуваються з власними частотами поздовжніх коливань лінійних елементів деталей, причому коливання постійно підживлюються за рахунок надходження частини енергії зовнішнього руху (поступального або обертального дії), тому зовні дана система проявляє себе як консервативна і на площадці контакту деталей відбуваються постійні незатухаючі (зовнішні) пружні коливання (рис 5). Якщо торкатися фізичної сторони процесу, то коливання призводять до різкого збільшення окислення взаємодіючих поверхонь, що в ряді випадків може привести до специфічного зносу – фреттинг корозії [6]. Сила тертя, яка виникає на площадці контакту двох тіл, узгоджується з теорією тертя Е. Адировича і Д. Блохінцева [6], розробленою для чисто пружних матеріалів. Ці ефекти проявляються на площадці контакту деталей, в момент їх взаємодії (рисунок 1) [7]. Під час взаємодії штампа з зустрічною деталлю, відбувається його вдавлення в цю деталь, тому умови контактної взаємодії деталей починаються під дією ваги штампа і відбувається просідання балки-смуги, в зоні попередження штампа. Прогин балки-смуги під штампом призводить до взаємодії торцевого перетину балки-смуги з передньою кромкою штампа, що сприяє передачі дотичного зусилля на балку-смугу (ділянка l_2). Особливість такого навантаження рухомого з'єднання полягає в тому, що питомі зусилля в зоні контакту деталей зазвичай не перевищують межу пропорційності ($\sigma_{\text{пц}}$). Така навантаження, прикладена до суміжної ділянки попереду від рухомого штампа, викликає деформацію поздовжнього вигину попереду від ділянки контакту штампа у впадині. Зауважимо, що ділянка (l_1) балки-смуги в зоні контакту зі штампом зазнає поздовжніх коливань, підкоряючись теорії Е. Адировича і Д. Блохінцева, тобто матеріали деталей будуть слідувати закону Гука, і найбільші напруження в матеріалі не повинні перевищувати межу пропорційності $\sigma_x^{\text{оп}} \leq \sigma_{\text{пц}} (\tau_{xy}^{\text{оп}} \leq \tau_{\text{пц}})$.



Водночас дотичне зусилля T при його передачі на балку-смугу (в зоні перед штампом) викликає поздовжнє стиснення і поздовжній вигин у зоні перед штампом. Як показують результати експериментів [4], під дією тих самих навантажень (за абсолютною величиною) деформації у подовженій частині балки-смуги попереду від рухомого штампа отримують вигинні деформації внаслідок втрати поздовжньої стійкості, які є залишковими. Такі деформації балки-смуги слід трактувати як пластичні (тобто матеріал балки-смуги на ділянці l_2 слідує нелінійному закону Гука $\sigma_x = E_p \varepsilon_x^n$, де n – степеневий показник). При досягненні деформаціями балки-смуги певного критичного значення настає втрата поздовжньої стійкості балки. У цьому випадку напруження, що виникають у стисненому шарі балки-смуги, будуть меншими $\sigma_{пц}$ і σ_y . Тобто при розрахунку таких конструктивних елементів спостерігається зниження рівня допустимого навантаження залежно від коефіцієнта гнучкості балки-смуги λ ($\lambda = l/i$, де l – довжина розглянутого ділянки балки-смуги; i – мінімальний момент інерції перерізу балки-смуги), у даній задачі балка-смуга підкріплена пружною основою з коефіцієнтом «підкладки» β , з урахуванням β гнучкість балки-смуги λ зменшується. У випадку коротких балок-смуг (і балок, підкріплених пружною основою з коефіцієнтом підкладки β) при $\lambda = 30 \div 40$ для розрахунку стійкості формулою Ейлера користуватися не можна. Якщо ж гнучкість стрижня $\lambda \geq 100$, то виконуються розрахунки на стійкість за допомогою коефіцієнта зниження допустимого напруження φ , який визначається з використанням емпіричних формул. Ці формули протабульовані [5], де з таблиць можна обрати коефіцієнт зниження допустимих напружень $\varphi = \varphi(\lambda)$, якщо $\lambda \geq 100$.

Якщо деталі фрикційної пари взаємодіють при дотичних навантаженнях, близьких до $\sigma_{пц}$ (або σ_y), то контактування подовженої частини балки-смуги буде відбуватися в зоні дії пластичних (залишкових) деформацій. Тобто в зоні балки-смуги перед штампом відбудуться залишкові деформації з утворенням деформаційних хвиль з гребенями.

Ці залишкові хвилі після проходження по ним штампа частково або



повністю зрізаються з утворенням зруйнованих деформаційних мікронерівностей, які після їх руйнування сприйматимуться як початкові геометричні мікронерівності з шорсткою поверхнею, покритою мікроступами рваної форми. Ці шорсткості підтримують етап виникнення чисто пружних автоколивань, відповідно до теорії тертя і далі попереду крайки штампа з ділянкою балки-смуги довжною l_2 рисунок 1.

В результаті багатократного взаємодії контактуючих деталей має місце накатка (або точна прироботка) контактуючих деталей, що супроводжується підвищенням механічних властивостей деталей пари [7], таких як твердість контактуючих (прирабатуваних) поверхонь, опір зрізу, межа міцності, межа витривалості. Тобто матеріали (їхні мікронерівності) під дією тієї ж дотичної навантаження можуть поводитися не як матеріали з нелінійною пружністю (характеризовані дотичним і приведеним модулями), а як пружні або частково крихкі матеріали. Якщо на пару буде діяти та ж навантаження, то замість пластичної деформації попереду штампа (у вигляді гофрованої поверхні) утворюється складчаста (пластинчаста поверхня), що в більшій мірі характеризується відривом утворених складок поверхневого шару від пружної основи деталі. Причому лусочки цієї поверхні, що є елементами зносу, чергуються з недеформованими (плоскими елементами) взаємодіючих поверхонь.

У результаті взаємодії деталей, у яких деформаційні мікронерівності піддаються утворенню мікротріщин довжиною $\lambda_2/2$ (половина довжини хвилі деформаційної мікронерівності) відбувається відрив частинки поверхневого шару, навантаженого як дотичною навантаженням, так і згинальним моментом сили T на плече $h/2$. При взаємодії короткого плоского (і жорсткого) штампа з протяжною більш податливою деталлю розглянемо пружно-пластичну взаємодію більш жорсткої короткої деталі та більш податливої протяжної деталі. Врахуємо той факт, що вплив виду деформування протяжної деталі під дією штампа в зоні їх взаємодії призводить до місцевого прогину і впровадження масивного предмета в протяжну деталь, при цьому утворюється рухомий слід



штампа на рухомій деталі. Для подальшого руху штампа до його сліду має бути прикладено поздовжнє розтягувальне зусилля. З метою утримання ділянки балки l_1 у розтягнутому стані ліва рухома опора ділянки l_1 балки повинна рухатися зі швидкістю штампа (або залишатися нерухомою в рухомій системі координат зі швидкістю v_0). Після прикладання рухомого зусилля T ділянка балки-смуги отримає поздовжнє переміщення $y(x, t)$, яке залежить як від часу t , так і від положення точки з координатою x на площадці контакту, при цьому координата x знаходиться в межах $(0 \leq x \leq l_1)$, якщо x – рухома координата. Розглянемо площадку контакту з розміром b, l_1, h (рисунок 5) з розподіленою масою m , жорсткістю балки-смуги E, F .

Під $y(x, t)$ будемо розуміти поздовжнє зміщення (деформацію) площадки контакту (zOx рухома система координат). Розглянемо розтягнення ділянки l_1 під дією сумарного зусилля T

$T = \sum_{i=1}^n \tau_i$ – сума елементарних зусиль на довжині площадки контакту; τ_i – інтенсивність дотичних зусиль на площадці контакту.

Вважаємо, що балка-смуга (її зовнішні волокна) навантажена зовнішнім розподіленим зусиллям з боку протилежної деталі, при цьому балки-смуги на взаємодіючих деталях підкріплені пружною основою (з коефіцієнтом основи β).

У роботі [8] розглянуто задачу про розтягнення рухомої балки-смуги в рухомій системі координат, з урахуванням рухомої пружної основи. Зовнішніми силами для цього завдання є вага штампа P і сила тертя T (як і коефіцієнт тертя f), представлені у вигляді кубічної залежності від швидкості ковзання деталей $v_{ск}$.

З урахуванням викладених міркувань змінна $y(x, t)$ є пружним переміщенням точки x у межах площадки контакту.

Як випливає з [8], диференціальне рівняння для визначення поздовжніх переміщень балки-смуги має вигляд

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{E_c F}{m} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\beta y}{m} + \frac{T}{b l_1 m}, \quad (9)$$

де E_c – модуль пружності поверхневого шару; F – площа поперечного



перерізу поверхневого шару деталі; m – погонна маса матеріалу деталі; P – вертикальне навантаження на деталь (її вага); b , l_1 – лінійні розміри рухомої деталі; β – коефіцієнт основи по відношенню до модифікованого поверхневого шару.

Силу тертя T запишемо з урахуванням коефіцієнта тертя f , представленого у вигляді кубічної залежності від швидкості ковзання $v_{\text{ск}}$ [9].

$$f = f_0 - a \frac{\partial y}{\partial t} + \bar{b} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^3, \quad (10)$$

де f_0 – коефіцієнт тертя спокою; $a = \frac{3(f_0 - f_{\min})}{2v_{\text{кр}}}$ – ...коефіцієнт характеристики тертя для спадного відрізка залежності $f = f(v_{\text{ск}})$ [9]; $\bar{b} = \frac{f_0 - f_{\min}}{2v_{\text{кр}}^3}$ – коефіцієнт характеристики тертя для її параболічної гілки (елемент кубічної параболи) [9]; $f_{\min}$ – мінімальне значення коефіцієнта тертя згідно з характеристикою для швидкості $v_{\text{кр}}$ [9].

Використовуючи макромодель тертя, у вигляді (10), запишемо диференціальне рівняння для поздовжніх автоколивань балки-смуги

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{E_c F}{m} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\beta y}{m} + \frac{P}{bl_1 m} \left[f_0 - a \frac{\partial y}{\partial t} + \bar{b} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^3 \right]. \quad (11)$$

Рівняння (11) формально розв'яжемо відносно $y(x, t)$

$$y(x, t) = -\frac{m}{\beta} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{E_c F}{\beta} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{mP}{bl_1 \beta} \left[f_0 - a \frac{\partial y}{\partial t} + \bar{b} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^3 \right]. \quad (12)$$

Рівняння (11) і його модифікований запис (12) повинні розглядатися з урахуванням граничних умов (рисунок 1), які представимо для лівого кінця балки-смуги при $x = 0$

$$\begin{cases} y|_{x=0} = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial x}|_{x=0} = 0 \end{cases}. \quad (13)$$

Окрім умов (13) для правого кінця балки-смуги можна записати граничну умову $y|_{x=l_1} = \xi_{\max}$, що означає, що зміщення правого кінця $\xi_{\max}$ буде найбільшим переміщенням площадки контакту (при $x = l_1$), яке поки ще невідомо.

Звертаючись до рівняння (11), робимо висновок, що його точний розв'язок



отримати не вдається. Тому розв'язок будемо будувати, виходячи з методу ітерацій та методу Фур'є [9]. Припустимо, що $y_1(x, t)$ є наближеним розв'язком (12)

$$y_1(x, t) = \sum_{i=1}^n Y_1(x) Z_1(t) = (C_1 \cos(p_n x) + C_2 \sin(p_n x)) \frac{v_0}{p_0} \sin(p_0 t), \quad (14)$$

де $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{\xi_{max}}{\sin\left(\sqrt{\frac{mP^2 - \beta}{E_c F}} \cdot l\right)}$ – довільні постійні задачі, що визначаються з

граничних умов; p_n – частота коливань, що відповідає кожній n -ій формі коливань балки-смути; p_0 – частота автоколивань балки-смути; v_0 – початкова швидкість рухомого елемента контактуючої пари.

Наближене рішення (14), підставлене в (12), дає перше наближення за методом ітерацій.

Для подальших викладок, поки що перетворимо вираз дотичної сили, прикладеної до початкового гребеня балки-смути в т. А (див. рисунок 1, 3). Використовуючи вираз (14) і наближені значення функцій $Y_1(x)$, $Z_1(t)$ запишемо вираз дотичної сили для правого кінця балки-смути

$$T = T_A(x, t) = \frac{mP}{bl_1\beta} [f_0 - y_{max} v_0 a \cos(pt) + y_{max}^3 v_0^3 \bar{b} \cos^3(pt)]. \quad (15)$$

З виразів (12), (14), (15) знайдемо $y_{max}(x, t) = \xi_{max}$ виходячи з невикористаної граничної умови $y_{max}(x, t) = \xi_{max} = y(l_1, t)$, тоді

$$\begin{aligned} \xi_{max} = & \frac{mP}{\beta} v_0 \sin(pt) \cdot \frac{\xi_{max}}{\sin\left(\sqrt{\frac{mP^2 - \beta}{E_c F}} \cdot l_1\right)} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{mP^2 - \beta}{E_c F}} \cdot l_1\right) - \frac{E_c F}{\beta} \cdot \frac{\xi_{max}}{\sin\left(\sqrt{\frac{mP^2 - \beta}{E_c F}} \cdot l_1\right)} \times \\ & \times v_0 \sin(pt) \left(\sqrt{\frac{mP^2 - \beta}{E_c F}}\right)^2 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{mP^2 - \beta}{E_c F}} \cdot l_1\right) + \\ & + \frac{mP}{bl_1\beta} [f_0 - \xi_{max} v_0 a \cos(pt) + \xi_{max}^3 v_0^3 \bar{b} \cos^3(pt)]. \end{aligned} \quad (16)$$

Звернемося до рівняння (12), яке з урахуванням прийнятих позначень перетворюється на вигляд (16), якщо використовувати додаткову граничну умову

$$y(l_1, t)|_{x=l_1} = \xi_{max}. \quad (17)$$

Отримуємо, що рівняння (16) може бути розв'язано відносно ξ_{max} , якщо



представити конкретне значення параметру t . Зазначимо, що перші два доданки (16) визначають перехідні процеси при коливаннях, і з часом вони затухають (як у реальних дисипативних системах). Тому при визначенні ξ_{max} приймемо $t = 0$. Розглядаючи силові складові (вираз у квадратних дужках), вони приймають найбільші значення. Виходячи з таких міркувань, запишемо вираз для визначення ξ_{max} як розв'язок кубічного рівняння

$$\xi_{max} = \frac{mP}{bl_1\beta} [f_0 - \xi_{max}v_0a\cos(pt) + \xi_{max}^3v_0^3\bar{b}\cos^3(pt)], \quad (18)$$

при $t = 0$ отримаємо

$$\xi_{max} = \frac{mP}{bl_1\beta} [f_0 - \xi_{max}v_0a + \xi_{max}^3v_0^3\bar{b}]. \quad (19)$$

Рівняння (19) може бути приведено до вигляду

$$\xi_{max}^3 - \xi_{max} \left(\frac{a}{\bar{b}v_0^2} + \frac{bl_1\beta}{Pm\bar{b}v_0^3} \right) + \frac{f_0}{\bar{b}v_0^3} = 0. \quad (20)$$

Розв'язок (20) має три корені, спочатку будемо вважати, що серед коренів є хоча б один дійсний, а інші два комплексно-спряжені, тому вони не відповідають фізичному сенсу задачі. Кількість дійсних коренів залежить від знака дискримінанту рівняння D

$$D = \frac{f_0^2}{4\bar{b}^2v_0^6} + \left(\frac{a}{3\bar{b}v_0^2} + \frac{bl_1\beta}{3Pm\bar{b}v_0^3} \right)^3, \quad (21)$$

якщо $D > 0$, то рівняння (20) має один дійсний корінь.

З метою визначення дійсного кореня використаємо розв'язок Кардано

$$y_1 = u_1 + v_1, \quad (22)$$

де

$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{f_0}{2\bar{b}v_0^3} + \sqrt{\left(\frac{f_0}{\bar{b}v_0^3}\right)^2 + \left(\frac{a}{3\bar{b}v_0^2} + \frac{bl_1\beta}{3Pm\bar{b}v_0^3}\right)^3}},$$

$$v_1 = \sqrt[3]{-\frac{f_0}{2\bar{b}v_0^3} - \sqrt{\left(\frac{f_0}{\bar{b}v_0^3}\right)^2 + \left(\frac{a}{3\bar{b}v_0^2} + \frac{bl_1\beta}{3Pm\bar{b}v_0^3}\right)^3}}.$$

Для подальшого розв'язання кубічного рівняння, після визначення y_1 використаємо розклад лівої частини рівняння на множники

$$\xi_{max}^3 - \xi_{max} \left(\frac{a}{\bar{b}v_0^2} + \frac{bl_1\beta}{Pm\bar{b}v_0^3} \right) + \frac{f_0}{\bar{b}v_0^3} = (\xi_{max} - y_1)(\xi_{max} - y_2)(\xi_{max} - y_3). \quad (23)$$



Оскільки розв'язок y_1 знайдено, то добуток $(\xi_{max} - y_2)(\xi_{max} - y_3)$ дасть квадратне рівняння, розв'язок якого дозволяє знайти залишені корені рівняння (20).

Знайдемо найбільше значення ξ без спрощуючих допущень. З цією метою формально запишемо (16), виходячи з умови, що $y = \xi_{max}$ і $x = l_1$. Тоді матимемо

$$\begin{aligned} \xi_{max} = & \xi_{max} \frac{mP}{\beta} v_0 \sin(pt) - \xi_{max} \frac{mP^2 - \beta}{\beta p} v_0 \sin(pt) + \frac{mP}{bl_1 p} f_0 - \\ & - \xi_{max} \frac{mP}{bl_1 p} v_0 a \cos(pt) + \xi_{max}^3 \frac{mP}{bl_1 p} v_0^3 \bar{b} \cos^3(pt). \end{aligned} \quad (24)$$

Визначимо, при яких значеннях t змінна $y_{max}(x, t) = \xi$ приймає найбільше значення. З цією метою обчислимо похідну від (24) і прирівняємо її до нуля

$$\begin{aligned} 0 = & \xi_{max} \frac{mP}{\beta} v_0 p \cos(pt) - \xi_{max} \frac{mP^2 - \beta}{\beta} v_0 \cos(pt) + \xi_{max} \frac{mP}{bl_1} v_0 a p \sin(pt) - \\ & - \xi_{max}^3 \frac{mP}{bl_1 p} v_0^3 3 \bar{b} \cos^2(pt) \sin(pt). \end{aligned} \quad (25)$$

Введемо позначення

$$\alpha_1 = \frac{v_0}{\beta p} [mPp - (mP^2 - \beta)], \alpha_2 = \frac{mP}{bl_1 p} v_0 a, \alpha_3 = \frac{mP}{bl_1 p} v_0^3 \bar{b}, \alpha_4 = \frac{mP}{bl_1 p} f_0. \quad (26)$$

Тоді з урахуванням (26) запишемо (24) у компактному вигляді

$$\xi_{max} = \xi_{max} \alpha_1 \sin(pt) + \alpha_4 - \xi_{max} \alpha_2 \cos(pt) + \xi_{max}^3 \alpha_3 \cos^3(pt). \quad (27)$$

Після диференціювання (27) по t і виконання перетворень отримаємо

$$0 = \xi_{max} \alpha_1 p \cos(pt) + \xi_{max} \alpha_2 p \sin(pt) - 3 \xi_{max}^3 \alpha_3 p \cos^2(pt) \sin(pt). \quad (28)$$

$$0 = \xi_{max} \alpha_1 p \cos(pt) + [\xi_{max} \alpha_2 p - 3 \xi_{max}^3 \alpha_3 p \cos^2(pt)] \sin(pt). \quad (29)$$

$$\begin{aligned} [9 \xi_{max}^6 \alpha_3^2 p^2 \cos^4(pt) - 6 \xi_{max}^4 \alpha_2 \alpha_3 p^2 \cos^2(pt) + \xi_{max}^2 \alpha_2^2 p^2] \times \\ \times (1 - \cos^2(pt)) = \xi_{max}^2 \alpha_1^2 p^2 \cos^2(pt). \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} 9 \xi_{max}^6 \alpha_3^2 p^2 \cos^4(pt) - 6 \xi_{max}^4 \alpha_2 \alpha_3 p^2 \cos^2(pt) + \xi_{max}^2 \alpha_2^2 p^2 - \\ - 9 \xi_{max}^6 \alpha_3^2 p^2 \cos^6(pt) + 6 \xi_{max}^4 \alpha_2 \alpha_3 p^2 \cos^4(pt) - \\ - \xi_{max}^2 \alpha_2^2 p^2 \cos^2(pt) = \xi_{max}^2 \alpha_1^2 p^2 \cos^2(pt). \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} 9 \xi_{max}^6 \alpha_3^2 p^2 (\cos^4(pt) - \cos^6(pt)) - 6 \xi_{max}^4 \alpha_2 \alpha_3 p^2 (\cos^2(pt) + \cos^4(pt)) + \\ + \xi_{max}^2 \alpha_2^2 p^2 (1 - \cos^2(pt)) = \xi_{max}^2 \alpha_1^2 p^2 \cos^2(pt). \end{aligned} \quad (32)$$

Зауважимо, що вирази в перших двох дужках (32) при $pt \rightarrow 0$ або $pt \rightarrow i\pi$,



де $i = 1, 2, 3, \dots$ будуть малими величинами. Якщо ж $\cos(pt) \rightarrow 1$ (або $\cos(pt + i\pi) \rightarrow 1$), то приблизно можна визначити $\cos^2(pt)$ залишаючи в (32) тільки два останні вирази.

Звідки

$$\cos^2(pt) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \left(\cos(pt) = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}} \right). \quad (33)$$

Тоді

$$\sin(pt) = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}}. \quad (34)$$

Підставляючи (33), (34) у вирази (27), отримаємо

$$-\xi_{max} + \xi_{max}^3 \alpha_3 \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}} + \xi_{max} \left(\alpha_1 \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}} - \alpha_2 \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}} \right) + \alpha_4 = 0. \quad (35)$$

Розв'язавши (35) відносно ξ_{max} за методом Кардано отримаємо або один, або три дійсні корені. Найбільший (позитивний) корінь (один із трьох) або один дійсний корінь дадуть найбільше позитивне зміщення контактної площадки.

Таким чином, отримано найбільше значення переміщення кінця контактної площадки при $x = l_1$ з урахуванням і без урахування спрощуючих допущень. Це рішення буде використано надалі при визначенні амплітуд коливань балки-смужки на ділянці l_2 .

Зауважимо, що дотичне зусилля $T^* = T + \Delta T$ є параметричним навантаженням для поверхневого шару в межах ділянки балки-смужки l_2 , який може бути описаний диференціальним рівнянням четвертого порядку з частинними похідними [10]

$$E_c I \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \beta v + T^* \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0. \quad (36)$$

Розглянемо рівняння (36) з урахуванням граничних умов для шарнірно опертих країв балки-смужки.

У наведеному виразі:

$v(x, t)$ – поперечний прогин балки-смужки; E_c – модуль пружності поверхневого шару балки-смужки; I – момент інерції поперечного перерізу балки-смужки; β – коефіцієнт пружної віддачі основи.



Для багатьох випадків навантаження балок-смужок розподілене дотичне зусилля може бути описане за допомогою формули (15), яка представлена для довільної точки ділянки l_1 контакту деталей.

Враховуючи той факт, що зусилля T передається балці-смужці в точці A при $x = l_1$, то

$$T = T_A(x, t) = T_A(l_1, t) = \frac{mP}{\beta b l_1} [f_0 - \xi_{max} v_0 a \cos(pt) + \xi_{max}^3 v_0^3 \bar{b} \cos^3(pt)]. \quad (37)$$

Для аналізу виразів T^* , $T + \Delta T$ запишемо на підставі [8] вираз $y(x, t)$ у розгорнутій формі на ділянці l_1 .

На підставі даних [9] запишемо наближене вираз для позовжнього переміщення точок балки-смужки довжиною l_1

$$\begin{aligned} y(x, t) = & \frac{mP}{\beta} v_0 \sin(pt) \cdot \frac{\xi_{max}}{\sin\left(\sqrt{\frac{mP^2 - \beta}{E_c F}} \cdot l_1\right)} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{mP^2 - \beta}{E_c F}} \cdot x\right) - \\ & - \frac{E_c F}{\beta} \cdot \frac{\xi_{max}}{\sin\left(\sqrt{\frac{mP^2 - \beta}{E_c F}} \cdot l_1\right)} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{mP^2 - \beta}{E_c F}} \cdot x\right) \cdot \frac{v_0}{p} \sin(pt) + \\ & + \frac{mP}{\beta b l_1} \left[f_0 - v_0 a \cos(pt) \cdot \frac{\xi_{max}}{\sin\left(\sqrt{\frac{mP^2 - \beta}{E_c F}} \cdot l_1\right)} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{mP^2 - \beta}{E_c F}} \cdot x\right) + \right. \\ & \left. + v_0^3 \bar{b} \cos^3(pt) \cdot \frac{\xi_{max}^3}{\sin\left(\sqrt{\frac{mP^2 - \beta}{E_c F}} \cdot l_1\right)} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{mP^2 - \beta}{E_c F}} \cdot x\right) \right]. \quad (38) \end{aligned}$$

Для попереднього спрощення викладок у розв'язанні рівняння (36) не були враховані інерційні та деформаційні складові, тому вирази для $T(x, t)$ мають вигляд (37), тоді позовжні переміщення балки-смужки представимо у формі

$$y(x, t) = \frac{mP}{\beta b l_1} [f_0 - \xi_{max} v_0 a \cos(pt) + \xi_{max}^3 v_0^3 \bar{b} \cos^3(pt)]. \quad (39)$$

Як впливає з [1], при коливаннях і багаторазовому переформуванні поверхневих шарів у межах взаємодії контактних майданчиків на ділянці l_1 (при циклічному переміщенні елементів поверхневого шару спостерігається зближення кінців (умовних опор) ділянки l_2 балки-смужки, в результаті цього переміщення, на ділянці l_2 виникає додаткова позовжня сила у вигляді



параметричного навантаження

$$\Delta T = -cy(x, t), \quad (40)$$

де c – розподілена поздовжня жорсткість балки-смужки з підповерхневими шарами матеріалу деталі. Тоді, відповідно до формул (37), (39), (40), повна поздовжня сила, викликана силами тертя і зміщення кінців стрижня (T^*) запишеться у вигляді

$$T^* = T + \Delta T = \frac{mP(1-c)}{\beta b l_1} [f_0 - \xi_{max} v_0 a \cos(pt) + \xi_{max}^3 v_0^3 \bar{b} \cos^3(pt)]. \quad (41)$$

Введемо позначення $P^* = P(1 - c)$, при цьому вираз T^* за формою збігатиметься з (37)

$$T^* = \frac{mP^*}{\beta b l_1} [f_0 - \xi_{max} v_0 a \cos(pt) + \xi_{max}^3 v_0^3 \bar{b} \cos^3(pt)]. \quad (42)$$

Тоді як розв'язок (42) скористаємося отриманим раніше розв'язком [1].

Шуканий розв'язок (36) знайдемо у вигляді добутку двох функцій

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^n z_k(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{l_2}\right) \quad (43)$$

з урахуванням граничних умов для задачі про поздовжній вигин балки-смужки на ділянці l_2 (при шарнірному опиранні кінців)

$$\begin{cases} v(0, t) = 0 ; v(l_2, t) = 0 \\ v''(0, t) = 0 ; v''(l_2, t) = 0 \end{cases} \quad (44)$$

де $l_1 \leq x \leq l_2$.

Підставляючи (43) в початкове рівняння (36), отримаємо

$$E_c I \frac{k^4 \pi^4}{l_2^4} z_k(t) + m \ddot{z}_k(t) + \beta z_k(t) - T^* \frac{k^2 \pi^2}{l_2^2} z_k(t) = 0 \quad (45)$$

або

$$\ddot{z}_k + \left[E_c I \frac{k^4 \pi^4}{m l_2^4} + \frac{\beta}{m} - T^* \frac{k^2 \pi^2}{m l_2^2} \right] z_k = 0. \quad (46)$$

Якщо підставити в (46) замість T^* його значення (42), то отримаємо:

$$\begin{aligned} \ddot{z}_k + \left[E_c I \frac{k^4 \pi^4}{m l_2^4} + \frac{\beta}{m} - \frac{k^2 \pi^2}{m l_2^2} \cdot \frac{mP^*}{\beta b l_1} \cdot f_0 + \frac{k^2 \pi^2}{m l_2^2} \cdot \frac{mP^*}{\beta b l_1} \cdot \xi_{max} v_0 a \cos(pt) - \right. \\ \left. - \frac{k^2 \pi^2}{m l_2^2} \cdot \frac{mP^*}{\beta b l_1} \cdot \xi_{max}^3 v_0^3 \bar{b} \cos^3(pt) \right] z_k = 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Оскільки рівняння (47) відрізняється від відповідного рівняння [1] лише величиною зусилля P^* , тому за аналогією з отриманим раніше рішенням



скористаємося методом варіації параметрів.

Згідно з алгоритмом розв'язання [11] вираз (47) приводиться до вигляду

$$\ddot{z}_k(t) + \omega_{0k}^2[1 - \alpha_k^* \cos(pt) + \beta_k^* \cos^3(pt)]z_k = 0, \quad (48)$$

де ω_{0k}^* – власна частота коливань балки-смушки l_2 для форми (коливань) з індексом k , яка знаходиться з виразу

$$\omega_{0k}^2 = E_c I \frac{k^4 \pi^4}{m l_2^4} + \frac{\beta}{m} - \frac{k^2 \pi^2}{m l_2^2} \cdot \frac{m P^*}{\beta b l_1} \cdot f_0,$$

де $P^* = P(1 - c)$ – приведенне вертикальне навантаження;

$$\alpha_k^* = \frac{k^2 \pi^2}{m l_2^3} \cdot \frac{m P^*}{\beta b l_1} \cdot \xi_{max} v_0 a \cdot \frac{\beta m l_2^4 b l_1}{E_c I k^4 \pi^4 b l_1 + \beta l_2^4 b l_1 + k^2 \pi^2 P^* l_2^2 f_0},$$

$$\beta_k^* = \frac{k^2 \pi^2}{m l_2^3} \cdot P^* \cdot \xi_{max}^3 v_0^3 \bar{b} \cdot \frac{\beta m l_2^4 b l_1}{E_c I k^4 \pi^4 b l_1 + \beta l_2^4 b l_1 + k^2 \pi^2 P^* l_2^2 f_0}.$$

Для розв'язання задачі цим методом необхідно скласти функцію $\varphi^*(t)$ і задатися значенням параметра μ з діапазону ($0 < \mu \leq 1$). Приймаємо $\mu = 1$, при цьому періодична функція рівняння має вигляд

$$\varphi_k^*(t) = \beta_k^* \cos^3(pt) - \alpha_k^* \cos(pt). \quad (49)$$

Функція $\varphi^*(t)$ повинна задовольняти умову

$$\left| \frac{\varphi'^*(t)}{\varphi^*} \right| + \frac{\omega_{0k}^*}{2\pi} \ll 1. \quad (50)$$

Якщо виконується умова (50), то рівняння (48) представляємо у формі Каннінгема [11]

$$\ddot{z}_k(t) + \omega_{0k}^2[1 + \mu \varphi^*(t)]z_k = 0. \quad (51)$$

Відповідно до методу варіації параметрів, породжуюче рішення запишемо у формі

$$z_k(t) = A_k^* \cos(\omega_{0k}^* t + \Theta_k^*) = A_k^* \cos \psi_k, \quad (52)$$

де ψ_k – часова змінна ($\psi_k = \omega_{0k}^* t + \Theta_k^*$); A_k^* , Θ_k^* – параметри, що підлягають варіації (A_k^* – амплітуда деформаційних хвиль для k -ої гармоніки; Θ_k^* – початкова фаза для k -ої гармоніки).

Відповідно до алгоритму розв'язання [11]

$$\frac{dA_k^*}{dt} = \mu_k \omega_{0k}^* A_k^* \varphi_k^*(t) \sin \psi_k \cos \psi_k, \quad (53)$$

$$\frac{d\Theta_k^*}{dt} = \mu_k \omega_{0k}^* \varphi_k^*(t) \cos^2 \psi_k. \quad (54)$$



Розв'язання (53) знаходимо в результаті його інтегрування

$$A_k^* = B_k \exp \left[\frac{\mu_k \omega_{0k}^*}{2} \int \varphi_k^*(t) \sin 2\psi_k dt \right]. \quad (55)$$

Відповідно до формули (55), можна виконати запис наближеного рівняння

$$\int \varphi_k(t) \sin 2\psi_k dt \cong -\frac{\varphi_k^*(t)}{2\omega_{0k}^*} \cos 2\psi_k. \quad (56)$$

Якщо (50) не виконується, то можна безпосередньо інтегрувати (56). З урахуванням (56) отримаємо наближене значення виразу (55)

$$A_k^*(t) = B_k \exp \left[-\frac{\mu_k}{4} \varphi_k^*(t) \cos 2\psi_k(t) \right]. \quad (57)$$

Рівняння (57) виражає коливання амплітуд з частотою, яка визначається кутом $2\psi_k(t) = 2(2\omega_{0k}^* t + \Theta_k^*)$.

Виходячи з умов (50), амплітуда може реалізовувати лише малі зміни кожного циклу коливань. Тому має сенс розглядати значення A_k^* в момент, коли $z_k(t)$ досягає максимуму, враховуючи, що протягом найближчого періоду $A_k^*(t)$ будуть зберігати ті ж значення. Тоді, враховуючи вигляд породжуючого рішення, максимум $\max z_k(t)$ досягається при $\cos 2\psi_k = +1$, і рівняння для амплітуд набуде вигляду

$$A_k^*(t) = B_k \exp \left[-\frac{\mu_k}{4} \varphi_k^*(t) \right] \approx B_k \left[1 - \frac{\mu_k}{4} \varphi_k^*(t) \right], \quad (58)$$

де B_k – довільна стала, яка визначається з початкових умов задачі і трактується як початкове зміщення.

Для визначення кута змін Θ_k^* достатньо скористатися середнім значенням кута за цикл коливань.

$$\left(\frac{d\Theta_k^*}{dt} \right)_{\text{cp}} = \frac{\mu_k \omega_{0k}^{*2}}{2} \varphi_k^*(t), \quad (59)$$

тоді

$$\Theta_k^* = -\frac{\mu_k \omega_{0k}^{*2} \alpha_k^*}{2p} \sin(pt) + \frac{\mu_k \omega_{0k}^{*2} \beta_k^*}{2p^2} \left(\sin(pt) - \frac{\sin^3(pt)}{3} \right), \quad (60)$$

і рівняння амплітуд набуває вигляду

$$A_k^* = B_k \left[1 - \frac{1}{4} \cdot (-\alpha_k^* \cos(pt) + \beta_k^* \cos^3(pt)) \right]. \quad (61)$$

Після обчислення похідної від A_k^* і прирівнювання її до нуля, визначимо $2_{\max} \psi_k$ і знайдемо вираз $\max A_k^*$ через α_k^* , β_k^* , B_k у вигляді



$$\max A_k^* = B_k \left[1 + \frac{2}{3} \cdot \alpha_k^* \cdot \sqrt{\frac{\alpha_k^*}{3\beta_k^*}} \right]. \quad (62)$$

Розглядаючи спільно деформаційний процес на суміжних ділянках балки-смуги l_1, l_2 відзначаємо, що ділянка l_1 знаходиться в зоні розтягування під дією зусилля T , а ділянка l_2 знаходиться в зоні стискання під дією того ж зусилля, це викликає подовження ділянки l_1 і зближення (віддалення) рухомого і нерухомого кінців ділянки l_2 (при коливаннях).

У такому випадку центральна частина балки-смуги може бути вигнута, у проміжку між опорами по дузі з кількома напівхвилями. Розглянута деформація ділянки l_2 має нелінійний характер. Виконаний розрахунок амплітуд хвиль деформації методом варіації параметрів дає рішення лінеаризованої задачі без урахування геометричної та фізичної нелінійності. Розглянемо процес деформування балки-смуги на ділянках l_1, l_2 з урахуванням взаємозв'язку між поздовжнім переміщенням (приростом зусилля ΔT) і хвилеподібними деформаціями балки-смуги $v(x, t)$ на ділянці l_2 .

В процесі взаємодії (при русі) деталей фрикційної пари, в шарі можна виділити два ділянки на подовженій деталі (рисунок 1):

1. Ділянка в зоні розтягування поверхневих шарів – стрічка OA ;
2. Ділянка в зоні стиснення поверхневих шарів (стрічка AB).

Як впливає з результатів спостережень та експериментальних досліджень з деталями таких кінематичних пар, ділянка OA піддається впливу сили T , яка викликає розтягнення ділянки (на розтягувальні деформації ділянки накладаються автоколивальні рухи). Накладені автоколивання, що нагадують абсолютно пружні (вільні) коливання, зі незначним розсіюванням енергії коливань, яке компенсується за рахунок енергії руху взаємодіючих тіл. Для опису процесів тертя з високим ступенем достовірності може бути використана теорія тертя [6], яка свідчить про те, що має місце пружна деформація тіл і матеріали деталей суворо дотримуються закону Гука, при цьому $\sigma_x \leq \sigma_{\text{пц}}$ ($\tau_{xy} \leq \tau_{\text{пц}}$). Однак при переході точки D (штампом) в точку A , балка-смуга, яка, як раніше було встановлено, під дією зусилля T може призвести до утворення



хвилястих нерівностей (гребенів) на ділянці AB , незважаючи на пружний вертикальний підпор, що чиниться підповерхневими шарами матеріалу на поверхневі шари в результаті пружно-пластичного поводження деформованої основи матеріалу.

При цьому, через значний внутрішній підпор деформації поверхневого шару можуть бути залишковими. Разом з тим при багатократному наклепі поверхневих шарів під впливом пружно-пластичного підпору зі сторони деформованої хвилеподібної внутрішньої поверхні матеріалу деталі може відбутися крихке руйнування зовнішнього ущільненого пружного шару металу, з попереднім утворенням поверхневих тріщин. Згідно з [12], існує два механізми утворення тріщин під час повзучості. Один з них головну роль відводить концентрації напружень, що виникає при скупченні дислокацій, інший – вакансійному механізму. У верхній частині кристалу, де розташовані екстра площини дислокацій, виникає велике стисне напруження для пластичних шарів металу і ущільнених поверхневих шарів. У нижній частині кристалу виникають розтягувальні напруження, які схильні до тріщиноутворення і можуть викликати руйнування шару відривом. Зародженню тріщини сприяє також те, що первинне порушення суцільності матеріалу виникає біля перешкоди (якою є скупчення дислокацій) ще до появи тріщини. Такий механізм розвитку тріщин маємо при нелінійному пружно-пластичному стані як поверхневих, так і підповерхневих шарів металу [13]. Ця нелінійність має як геометричну, так і фізичну складові. Для врахування нелінійності завдання розглянемо деформацію поздовжнього вигину ділянки AB у вигляді $v(x, t)$ разом з поздовжнім подовженням ділянки $OA - u(x, t)$ (рисунок 1). При цьому на ділянці AB поздовжня деформація ділянки трансформується в гофровану (хвилеподібну) поверхню. У цьому випадку виразимо приріст поздовжньої сили ΔT через параметри деформаційної хвилі (амплітуди A_k^* і приріст довжини балки-смуги Δy).

З цією метою звернемося до виразу для приросту поздовжньої сили ($\Delta T = -cy$) і взаємозв'язку між поздовжніми переміщеннями ділянки $l_1 \approx u(x, t)$ і амплітудою коливань деформаційної хвилі – хвилі на ділянці l_2 (її



прогином $v(x, t)$ при втраті балкою-смугою поздовжньої стійкості [14]).

У роботі [14] встановлений взаємозв'язок між поздовжнім переміщенням ділянки l_1 і амплітудою зміни деформаційної хвилі на ділянці l_2

$$v(x, t) = \sum A_k^*(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{l_2}\right). \quad (63)$$

Вважаючи, що переміщення $y(x, t)$ при деформаціях у зоні втрати поздовжньої стійкості набуває форми синусоїдальної кривої, при цьому

$$y(x, t) = y(l_1, t) = \frac{k^2 \pi^2 A_k^{*2}(t)}{4l_2} + \frac{3}{64} \cdot \frac{k^4 \pi^4 A_k^{*4}(t)}{4l_2^3}, \quad (64)$$

і беручи до уваги через малу величину $A_k(t)$ спрощену залежність

$$y(l_1, t) = \frac{k^2 \pi^2 A_k^{*2}(t)}{4l_2}, \quad (65)$$

можна перейти до виразу для приросту ΔT у вигляді $\Delta T \approx -\frac{ck^2 \pi^2}{4l_2} A_k^2(t)$.

Вираз для A_k^* , формула (61) є рівнянням амплітуди коливань балки-смуги без урахування ΔT . Використаємо вираз закону коливань балки-смуги з урахуванням ΔT , тоді замість (48), (61) матимемо:

$$\ddot{\bar{z}}_k + \omega_{0k}^2 \left[1 - \frac{\alpha_k^*}{4} \cos(pt) + \frac{\beta_k^*}{4} \cos^3(pt) + \frac{\Delta T}{T_k^*} \right] \bar{z}_k = 0. \quad (66)$$

У цьому випадку рівняння для визначення функції часу поперечного прогину [5], маємо

$$\ddot{\bar{z}}_k + \omega_{0k}^2 [1 - \alpha_k^* \cos(pt) + \beta_k^* \cos^3(pt)] \bar{z}_k - \omega_{0k}^2 \frac{ck^2 \pi^2}{4l_2 T_k^{*2}} \bar{z}_k^3 = 0. \quad (67)$$

З урахуванням перетворення функції $\cos^3(pt)$ до поєднання лінійних функцій $\cos(pt)$ і $\cos(3pt)$ запишемо рівняння (62) у вигляді

$$\ddot{\bar{z}}_k + \omega_{0k}^2 \bar{z}_k - \omega_{0k}^2 \frac{ck^2 \pi^2}{4l_2 T_k^{*2}} \bar{z}_k^3 = \alpha_k^* \cos(pt) - \frac{\beta_k^*}{4} (3\cos(pt) + 3\cos(3pt)). \quad (68)$$

Таким чином, рівняння (67) перетворено на рівняння Дюффінга, яке описує вимушені коливання балки-смуги на ділянці l_2 з частотою p і нелінійною відновлювальною силою.

Далі розглянемо рівняння Дюффінга з правої частини для основної частоти p та утроєної частоти $3p$

$$\ddot{\bar{z}}_k + \omega_{0k}^2 \bar{z}_k - \omega_{0k}^2 \delta_1 \bar{z}_k^3 = \omega_{0k}^2 \left(\alpha_k^* - \frac{3}{4} \beta_k^* \right) \cos(pt), \quad (69)$$



$$\ddot{z}_k + \omega_{0k}^2 \bar{z}_k - \omega_{0k}^2 \delta_1 \bar{z}_k^3 = -\omega_{0k}^2 \frac{\beta_k^*}{4} \cos(3pt). \quad (70)$$

У наведених виразах використані позначення:

$$\delta_1 = \frac{ck^2\pi^2}{4l_2T_k^{*2}} - \text{постійний коефіцієнт};$$

c – жорсткість поздовжнього зв'язку балки-смуги з підповерхневими шарами матеріалу деталі; l_2 – довжина стиснутого ділянки балки-смуги; $T_k^* = \frac{k^2\pi^2 E_c}{l_2^2} + \frac{\beta_1 l_2^2}{k^2\pi^2}$ – критична сила для балки-смуги, підкріпленої пружною основою з коефіцієнтом жорсткості β_1 ; $\omega_{0k}^2 = \frac{1}{m} \left(\frac{k^4\pi^4}{l_2^4} E_c I + \beta_1 \right)$ – квадрат k -ої власної частоти ненавантаженої балки-смуги (з розмірами $l_2 \times b \times h$);

T – сумарна дотична сила, прикладена до балки-смуги (включає як змінну, так і постійну складові); T_0 – постійна складова дотичного зусилля; T_1 – половина амплітуди коливань дотичного зусилля; $\Omega^2 = \omega_{0k}^2 \left(\frac{T_k^* - T_0}{T_k^*} \right)$ – власна частота коливань балки-смуги у завантаженому стані; μ_k – коефіцієнт збудження коливальної системи балки-смуги ($\mu_k = \frac{T_1}{2(T_k^* - T_0)}$), для багатьох систем є малим параметром.

У роботі [14] показано, що коефіцієнт нелінійної пружності у виразі (67) збігається з виразом $\omega_{0k}^2 \delta_1$ і фактично є фізичним коефіцієнтом пружності балки-смуги при критичному (або закритичному) її навантаженні. Крім того, при критичному навантаженні балки-смуги виявляються ефекти геометричної нелінійності, тому коефіцієнт нелінійної пружності $\gamma_{\alpha\beta}$ може бути представлений у вигляді

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{k^4\pi^4\omega_{0k}^2}{8l_2^4} \left(\frac{2cl_2}{T_k^*} + 1 \right), \quad (71)$$

тоді рівняння (48) з урахуванням нелінійного доданку $\Psi(z_k)$ запишемо у вигляді

$$\ddot{z}_k + \omega_{0k}^2 \left[1 - \frac{\alpha^*}{4} \cos(pt) + \frac{\beta_k^*}{4} \cos^3(pt) \right] z_k + \Psi(z_k) = 0, \quad (72)$$

а додатковий нелінійний доданок $\Psi(z_k)$ запишемо

$$\Psi(\bar{A}_k) = \gamma_{\alpha\beta} \bar{A}_k^3, \quad (73)$$



де $\Psi(\bar{A}_k)$ – нелінійна функція амплітуди.

Під час розв'язання рівнянь використовуємо метод, застосований у [11]. Розглянуті рівняння відрізняються від рівнянь з малою дисипацією [11] тим, що рівняння (69), (70) містять дисипативні елементи при коефіцієнтах α_k^* , β_k^* і функції $\cos(pt)$.

Розв'язання (69) і (70) шукаємо у вигляді

$$\bar{z}_k = \bar{A}_k^* \cos(pt), \quad (74)$$

$$\tilde{z}_k = \tilde{A}_k^* \cos(3pt). \quad (75)$$

Для визначення амплітуд коливань функцій $\bar{z}_k$, $\tilde{z}_k$ використовуємо алгебраїчні рівняння [11]

$$-p_k^2 \bar{A}_k^* + \omega_{0k}^2 \bar{A}_k^* + 3\omega_{0k}^2 \frac{\delta_1}{4} \bar{A}_k^{*3} = \omega_{0k}^2 \left(\alpha_k^* - \frac{3}{4} \beta_k^* \right), \quad (76)$$

звідки

$$3\omega_{0k}^2 \frac{\delta_1}{4} \bar{A}_k^{*3} + (\omega_{0k}^2 - p_k^2) \bar{A}_k^* - \omega_{0k}^2 \left(\alpha_k^* - \frac{3}{4} \beta_k^* \right) = 0, \quad (77)$$

або

$$\bar{A}_k^{*3} + \frac{4(\omega_{0k}^2 - p_k^2)}{3\omega_{0k}^2 \delta_1} \bar{A}_k^* - \frac{4(\alpha_k^* - \frac{3}{4} \beta_k^*)}{3\delta_1} = 0. \quad (78)$$

Окрім алгебраїчного рівняння (78) також розглянемо алгебраїчне рівняння

$$-p_k^2 \tilde{A}_k^* + \omega_{0k}^2 \frac{\delta_1}{4} \tilde{A}_k^{*3} = -\frac{\beta_k^*}{4}. \quad (79)$$

Для спрощення розв'язків (78), (79) введемо в розгляд позначення

$$\gamma_1 = \frac{4(\omega_{0k}^2 - p_k^2)}{3\omega_{0k}^2 \delta_1}; \gamma_2 = -\frac{4(\alpha_k^* - \frac{3}{4} \beta_k^*)}{3\omega_{0k}^2 \delta_1}; \gamma_3 = \frac{-\frac{\beta_k^*}{4}}{\omega_{0k}^2 \delta_1} \quad (80)$$

З урахуванням позначень (80) рівняння для амплітуд $\bar{A}_k$ набуде вигляду

$$\bar{A}_k^{*3} + \gamma_1 \bar{A}_k^* + \gamma_2 = 0. \quad (81)$$

Шукаємо дійсні (позитивні) корені (80).

Для цього дослідимо дискримінант $D = \left(\frac{\gamma_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_1}{3}\right)^3$, якщо $D < 0$, то рівняння має три дійсні корені, серед яких обираємо найбільший дійсний корінь. Якщо $D > 0$, то рівняння має один дійсний корінь, який при $\gamma_1 > 0$, буде розв'язком рівняння (81). Рівняння (82) описує збурювальний вплив з утроєною



частотою. Часто розв'язки таких рівнянь виключають з розгляду коливального процесу з нелінійною характеристикою відновлювальної сили.

За необхідності це рівняння записують у вигляді

$$\tilde{A}_k^{*3} + \gamma_1 \tilde{A}_k^* + \gamma_3 = 0, \quad (82)$$

$$\text{де } \gamma_3 = \frac{-\frac{\beta_k^*}{4}}{\omega_{0k}^2 \delta_1}.$$

Алгоритм розв'язання (82) відповідає алгоритму розв'язання (83), тільки замість константи γ_2 слід використовувати γ_3 .

Тому розглянемо розв'язання (82) за формулами Кардано

$$\bar{A}_{1k} = \sqrt[3]{\frac{\gamma_1}{2} + \sqrt{\frac{\gamma_2^2}{4} + \gamma_1^3}} + \sqrt[3]{\frac{\gamma_1}{2} - \sqrt{\frac{\gamma_2^2}{4} + \gamma_1^3}}. \quad (83)$$

У випадку $D > 0$ знаходимо єдиний корінь, який визначає амплітуду коливань $\bar{A}_{k1} = \max \bar{A}_k$. У випадку $D < 0$ рівняння (81) має три дійсні корені. За формулою (83) визначаємо один корінь.

Решта коренів визначаємо, розкладаючи поліном третього ступеня на прості множники (див. формули (29), (22), (23)). З цих трьох коренів визначаємо найбільший позитивний. Це буде $\bar{A}_{ki}^*$ або $\tilde{A}_{ki}^*$, тобто амплітуди коливань відповідних гармонік.

Для уточнення розв'язання (74), враховуючи малу нелінійність відновлювальної сили, наступне наближення функції $\bar{z}_k(t)$ шукаємо в формі

$$\bar{z}_k(t) = \bar{A}_{1k}^* \cos(pt) + \bar{A}_{3k}^* \cos(3pt). \quad (84)$$

Розв'язання полягає в тому, що воно містить як основну (першу), так і третю гармонічні складові. Підлягають визначенню $\bar{A}_{1k}^*$, $\bar{A}_{3k}^*$. При визначенні $\bar{z}_k(t)$ додатково використовуємо функцію $\tilde{z}_k(t) = \tilde{A}_{2k}^* \cos(3pt)$, тоді отримаємо

$$\bar{z}_k^*(t) = \bar{A}_{1k}^* \cos(pt) + (\bar{A}_{3k}^* + \tilde{A}_{2k}^*) \cos(3pt). \quad (85)$$

Коефіцієнти $\bar{A}_{1k}^*$, $\bar{A}_{3k}^*$ визначаємо як розв'язки кубічних рівнянь (81), (82). Крім того, коефіцієнт $\bar{A}_{3k}^*$ визначаємо згідно з [11], використовуючи співвідношення



$$\frac{\bar{A}_{3k}^*}{\bar{A}_{1k}^*} = \frac{-\frac{1}{4}\omega_{0k}^2\delta_1 A_{1k}^2}{\omega_{0k}^2 - 9p_1^2}. \quad (86)$$

Як $\bar{A}_{1k}^*$ приймаємо вираз (83). Підставляючи дійсний позитивний корінь ($\bar{A}_{1k}^*$) у вираз (83) знаходимо $\bar{A}_{3k}^*$. Після визначення $\bar{A}_{3k}^*$ і підстановки його значення у (85), імітуючи метод ітерацій, отримуємо уточнене значення $\bar{z}_k^*(t)$.

В результаті проведених експериментальних [11] та теоретичних досліджень встановлено, що балка-смуга поза площиною контакту знаходиться в пружнопластичному стані (з зміцненим поверхневим шаром), при цьому композиція поверхневих і підповерхневих шарів є вогнищем утворення дислокацій та мікротріщин, які в ряді випадків навантаження поверхневих шарів не піддаються втраті пружної стійкості, а піддаються місцевому крихкому руйнуванню через низьку гнучкість поверхневого шару.

Висновки

1. У роботі обґрунтована роль самонаводящих нестационарних напружень і деформацій взаємодіючих деталей у розвитку багатоциклових втомних руйнувань поверхневих шарів на мікро- та макрорівнях для зовнішніх шарів балки-смужки на ділянці під штампом і перед штампом при фрикційному та параметричному їх збудженні.

2. Досліджено причини пружно-пластичної поведінки зовнішніх шарів металевих деталей, які обумовлені як геометричною, так і фізичною нелінійною залежністю між поздовжніми та вигинними деформаціями деталей при нестационарних фрикційних процесах.

3. Авторами встановлена можливість виникнення нестійких станів поверхневих шарів, обумовлена їх крихкою структурою, які можуть руйнуватися за рахунок тріщиноутворення ще до втрати ними поздовжньої стійкості.

4. У роботі поставлено та розв'язано динамічну задачу про виникнення додаткової поздовжньої сили, яка за рахунок зміщення «рухомої» опори балки-смужки призводить до нелінійних фізичних моделей у зовнішніх зміцнених шарах деталей, які описуються за допомогою нелінійного рівняння Дуффінга.



5. Проведені дослідження призвели до створення фізичної моделі задачі, де зовнішні шари деталей представлені у вигляді сукупності анізотропних композицій поверхневих і підповерхневих шарів, які мають як крихкі (пружні), так і нелінійно пружні властивості, навантажені нестационарною дотичною силою, яка при депланації плоских перерізів призводить як до крихкого руйнування, так і до пружно-пластичного деформування шарів.

6. Практичне значення роботи полягає в тому, що виявлені режими експлуатації машин, коли виникає додаткове дотичне зусилля, яке призводить до додаткових поздовжніх переміщень і депланації верхніх шарів деталей, при цьому виникають додаткові (нерегламентовані) вертикальні прогини, що сприяють додатковій тріщиноутвореності та частковому крихкому руйнуванню цих шарів.

Такий механізм порушення цілісності зовнішніх шарів є передумовою для зносу поверхонь при циклічному навантаженні.

В цілому, процес зношування поверхневих шарів пов'язаний як з попереднім зміцненням зовнішніх шарів, їх переходом у крихкий стан, втратою поздовжньої стійкості шару від внутрішнього підпору підповерхневих шарів і крихким руйнуванням (частковим) зовнішнього шару без втрати його поздовжньої стійкості.