



KAPITEL 5 / CHAPTER 5 ⁵
**OPTIMIZATION MODELS FOR SELECTING OPTIONS FOR
DISTRIBUTION OF FUNCTIONS BETWEEN OPERATORS OF
INFORMATION PROCESSING AND CONTROL SYSTEMS**

DOI: 10.30890/2709-2313.2025-38-02-004

Вступ

Комплексна автоматизація та широке впровадження систем обробки інформації та управління (COIU) є одним із шляхів підвищення ефективності виробництва, управління виробничими та організаційними процесами. Останні роки пов'язані з упровадженням ієрархічних розподілених інформаційних систем з великою кількістю операторів, які взаємодіють через засоби телекомунікацій та спеціальне програмне забезпечення. Аналіз зміни ролі людини-оператора в процесі розвитку інформаційних технологій проводився багатьма дослідниками [5, 12, 13, 15, 17]. Ускладнення інформаційних систем ставить нові завдання організації оптимальної взаємодії операторів вказаних систем [1, 4, 10, 14, 25, 26].

Завдання ергономіки «розподіл функцій між операторами» у процесі функціонування сучасних систем змінює свій зміст. У більшості випадків таке завдання має вирішуватись багаторазово і може бути актуальним у довільний момент часу. Якщо для традиційних ерготехнічних систем [11,17] завдання вирішувалося, як правило, при проектуванні системи, іноді (з появою, наприклад, ГВС) - 1 раз на зміну, то з появою систем з оперативним виникненням запитів на вирішення завдань виникає необхідність їх розв'язання у режимі online.

Для систем з однотипними заявками використовують, як правило, логічно прості дисципліни обслуговування закріплення заявок за незайнятими операторами. Такі правила, наприклад, використовуються в сучасних Call-

⁵*Authors: Pasko Nadiia Borysivna, Viunenko Olexander Borisovich, Pasko Serhiy Mikhailovich*

Number of characters: 84000

Author's sheets: 2,10



центрах. У таких випадках перемикання на оператора, якому доручається заявка, проводиться автоматично.

Для складних ерготехнічних систем з великою кількістю операторів (поліергатичних систем), таких як

- гнучкі виробничі системи,
- системи супроводження й обробки команд по цілях,
- розрахункові центри,
- банківські системи,

в яких виконання заявки передбачає деяку операторську діяльність із використанням інформаційно-програмно-технічних засобів. Якість реалізації цієї діяльності суттєво залежить від того, кому доручено виконання заявки. Рішення про організацію діяльності приймається, зазвичай, спеціальним оператором, що добре знає предметну область і якого називають “оператор-керівник”. Такий оператор має (у неформалізованому, чи формалізованому вигляді) інформацію про функціональні можливості операторів-виконавців. Це дозволяє йому приймати будь-які рішення [20,21]. Для складних систем у зв'язку з великою кількістю параметрів, які повинен відстежувати оператор-керівник, та величезною кількістю варіантів організації діяльності, актуальним стає створення спеціальних систем підтримки прийняття рішень [16]. Основні вимоги та структура такої системи розроблені у [23].

Якість виконання заявок і дотримання ергономічних норм та вимог визначається значною мірою правильністю рішень щодо розподілу функцій між операторами [29,30,31]. Оператор-керівник зобов'язаний ідентифікувати замовлення, визначити пріоритет замовлення в порівнянні з вже виконуваними функціями, час виконання замовлення та призначити оператора-виконавця для реалізації замовлення. З огляду на те, що на деякому часовому відрізку оператори вже закріплені за виконанням регламентних функцій, оператор-керівник повинен мати інформацію про поточний стан системи. Виходячи з зайнятості операторів, на основі аналізу їх індивідуальних особливостей, керівник повинен мати можливість оцінити закріплення за ними замовлення, що надходить. Звідси



впливає необхідність визначення показників якості алгоритмів функціонування (АФ) виконання операторами-виконавцями регламентних і випадкових завдань. Залежно від конкретної виробничої ситуації, перед оператором-керівником може стояти завдання вибору оптимального варіанту закріплення функції. При цьому можлива множина різних задач оптимізації. Це може бути задача максимізації достовірності безпомилкового виконання. А в тих випадках, коли реалізація функції може бути виконана з порушеннями різних типів, завдання може бути сформульоване як задача мінімізації збитку від можливих порушень. На показники якості діяльності операторів СОІУ впливають фактори робочого середовища. Оператор-керівник повинен мати можливість оцінити міру впливу умов праці на кожному робочому місці.

У роботах вчених-ергономістів вирішено багато питань методології, теорії та практики ергономічного забезпечення автоматизованих систем, що створює передумови для вирішення завдання оперативного розподілу функцій між операторами [2, 3, 6-9, 23, 27]. Проте в цілому її не можна вважати вирішеною до кінця у зв'язку з відсутністю наукових підходів до опису, оцінювання та вибору оптимального варіанту розподілу функцій між операторами з урахуванням їх особливостей та безлічі технологічних обмежень, що є в системі обробки інформації та управління як системі «людина – техніка – середовище».

Вибір теми дослідження обумовлений потребами підтримки прийняття рішень операторів-керівників та необхідністю пошуку та використання ергономічних резервів підвищення надійності полієргатичних систем обробки інформації та управління.

В роботі [58] здійснений аналіз систем обробки інформації та управління як систем «людина – машина – середовище», відзначається зростання ролі людини-оператора, збільшення частки інтелектуальних процедур обробки інформації, зростаючі вимоги до безпомилковості діяльності. Також наведений формалізований опис організації СОІУ як полієргатичної системи. Складові комплексу системних моделей інформаційної моделі для оператора-керівника представлені роботами [42, 44, 45, 46, 49-51] враховують фактори, пов'язані з



полієргатичним характером системи, описують особливості груп операторів СОІУ. До основних моделей можна віднести: модель планової зайнятості операторів, що відображає стан зайнятості операторів виконанням регламентних функцій; модель індивідуальних технологій реалізації функцій, яка представляє результати оцінки показників якості виконання уже існуючих типових технологій, що забезпечує можливість використання їх для оцінки допустимих варіантів розподілу функцій; модель умов праці; організаційно-технологічна (проектна) модель, яка відображає результат вирішення задачі закріплення функції за операторами; професійно-морфологічна модель, яка описує на якісному рівні підготовленість та мотивацію операторів до виконання функцій (заявок); формалізований опис редукції функціональної мережі та інші.

Дана робота стосується формальних моделей задач оптимізації для прийняття рішень про закріплення заявок СОІУ за операторами-виконавцями. В монографії розроблені формальні моделі задач оптимізації, що виникають у практиці прийняття рішень про закріплення заявок СОІУ за операторами-виконавцями з урахуванням показників надійності діяльності. Розроблені постановки оптимізаційних задач для випадків опису алгоритму діяльності людини-оператора у вигляді графа робіт і графа подій. Розглянуто випадки необхідності забезпечення максимальної безпомилковості алгоритму діяльності та мінімізації збитків від помилок людини-оператора з можливістю врахування помилок різних типів.

Монографія розвиває ідеї моделювання та оптимізації надійності діяльності операторів систем обробки інформації та управління при розподілі функцій між ними з авторських публікацій [32-33, 35, 36, 37, 38, 39-41]. Роботу над нею автори розподілили таким чином: Н.Б. Пасько та О.Б. В'юненко написали параграф 1; С.М. Пасько – параграф 5. Решта матеріалу написана авторами спільно. Загальне редагування здійснила Н.Б. Пасько. В монографії використовуються результати кандидатської дисертації Н.Б. Пасько.



5.1. Змістовний аналіз та постановка задачі вибору варіантів розподілу функцій між операторами

Оператору-керівнику СОІУ в деякий, заздалегідь невідомий момент часу надходить заявка на реалізацію певної функції. Необхідно на підставі інформації про поточний стан системи, враховуючи зайнятість операторів, їх індивідуальні особливості, рівень підготовки, можливість спільної роботи, умови праці на робочому місці, вибрати варіант призначення операторів на етапи технологічного процесу виконання заявки. Метою прийняття рішень про закріплення функції є, як правило, забезпечення максимального рівня ефективності системи або заподіяння мінімальних збитків від дії помилок різних типів за умови, що будуть виконані обмеження: технологічні; ергономічні; на сумісність елементів; на час реалізації; на витрати вартісного ресурсу.

Постановка задачі. Розробити формальні моделі для класу задач, пов'язаних із прийняттям рішень про організацію виконання заявки (однієї), що оперативно надходить, виходячи з: вимог антропоцентричної концепції ергономічного забезпечення СОІУ; необхідності комплексного урахування: ергономічних норм та вимог; технологічних обмежень; орієнтації на функціонально-структурну теорію опису та оцінювання людино-машинної взаємодії.

Введемо наступні позначення:

f_i – функція, яка надходить на виконання;

α – варіант функціональної структури реалізації f_i ;

$F_S^{f_i}$ – множина альтернативних алгоритмів (функціональних структур)

варіантів реалізації функції f_i ;

O_α – множина операцій алгоритму α реалізації функції f_i ;

M_α – кількість операцій множини O_α ;



X'_α – множина операторів, яких допустимо назначити на реалізацію алгоритму α , визначається за формулою:

$$X'_\alpha = X_{sov}^{f_i\alpha} \cap X_{sv} \cap X_{ut},$$

де $X_{sov}^{f_i\alpha}$ – множина сумісних (таких, що можуть працювати в одній групі разом) для реалізації функціональної структури α функції f_i операторів;

X_{sv} – множина незайнятих виконанням інших функцій операторів;

X_{ut} – множина операторів с допустимими умовами праці на робочому місці;

L_α – кількість елементів множини X'_α ;

Тоді, з урахуванням введених позначень, в загальному випадку, математична модель задачі оптимізації безпомилкового виконання заявки набуває такого вигляду:

$$B(\alpha, Z(O_\alpha, X_\alpha)) \rightarrow \max; \quad (1)$$

$$\overline{Q}_j(\alpha, Z(O_\alpha, X_\alpha)) \theta Q_j^0, \quad j=1,2,\dots; \quad (2)$$

$$X_\alpha \in X'_\alpha; \quad (3)$$

$$Z = (z_{ml}) \in N^{M_\alpha \times L_\alpha}; \quad (4)$$

$$\alpha \in F_S^{f_i}, \quad (5)$$

де $Z = (z_{ml})$ – матриця, що характеризує призначення операторів на операції функціональної структури α реалізації функції f_i ; елементи матриці визначаються наступним чином:

$z_{ml} = 1$, якщо m -у операцію ($o_\alpha^m \in O_\alpha$) функціональної структури α виконує l -й оператор ($x_\alpha^l \in X_\alpha$), і $z_{ml} = 0$ в іншому випадку;

$\overline{Q}_j$ – система обмежень на заданий час, затрати вартісного ресурсу, а також різні технологічні обмеження;



Q_j^0 – вектор констант, за допомогою яких задаються граничні значення вартісних, часових ресурсів, показників якості виконання операторами операцій алгоритмів функціонування та ін. $\theta \in \{\leq, \geq, <, >, =\}$;

$N^{M_\alpha \times L_\alpha}$ – множина $M_\alpha \times L_\alpha$ матриць з елементами із N (поле натуральних чисел).

Рішення задачі (1)–(5) буде означати, що вибраний варіант α функціональної структури реалізації f_i і сформована матриця $Z = (z_{ml})$ призначення операторів на операції вибраної функціональної структури такі, що значення цільової функції B , яка виражає безпомилковість виконання f_i , набуде максимального значення.

Математична модель задачі мінімізації збитків від дії помилок різних типів при виконанні заявки, що надходить, може бути представлена у вигляді:

$$U(\alpha, Z(O_\alpha, X_\alpha)) = \sum_{h \in H} U_h B_h^0(\alpha, Z(O_\alpha, X_\alpha)) \rightarrow \min; \quad (6)$$

$$\overline{Q_j}(\alpha, Z(O_\alpha, X_\alpha)) \theta Q_j^0; \quad (7)$$

$$X_\alpha \in X'_\alpha; \quad (8)$$

$$Z = (z_{ml}) \in N^{M_\alpha \times L_\alpha}; \quad (9)$$

$$\alpha \in F_S^{f_i}; \quad (10)$$

де $U(\alpha, Z(O_\alpha, X_\alpha))$ – чисельне вираження збитків внаслідок внесення помилок різних типів під час виконання заявки f_i ;

H – безліч різних типів помилок та їх поєднань, які можуть бути внесені операторами під час виконання алгоритму, що реалізує заявку f_i ;

U_h – величина збитків від реалізації функції з порушеннями, визначеними h -м типом помилок;

B_h^0 – ймовірність виконання алгоритму, що реалізує заявку f_i , з помилками h -го типу.

Обмеження (7)–(10) аналогічні обмеженням (2)–(5).



Рішення задачі (6)–(10) буде означати, що вибраний варіант α функціональної структури реалізації f_i та сформована матриця $Z = (z_{mi})$ призначення операторів на операції вибраної функціональної структури такі, що значення цільової функції U , яка виражає величину збитку в результаті внесення помилок різних типів при виконанні заявки, що надходить f_i , набуде мінімальне значення.

Вираз цільових функцій залежить від типів задач оптимізації. Як критерій, як правило, розглядається:

- максимум ймовірності безпомилкового виконання заявки (для випадку, коли розглядається порушення технологічного процесу одного типу);
- мінімум втрат від помилок (коли доцільно враховувати виникнення помилок різних типів і відомі економічні втрати від порушень, що виникають внаслідок кожного виду порушення).

Оцінимо порядок кількості можливих варіантів закріплення функцій за операторами. Нехай структура діяльності операторів СОІУ при виконанні функції, що надійшла, описується сукупністю з l одиниць (операційних, функціональних, програмних). При побудові математичних моделей оцінки показників якості та надійності процесів необхідно враховувати як безвідмовні результати, так і помилкові. У зв'язку з цим, у кожній не альтернативної функціональної одиниці в моделях враховуються, як мінімум, два результати, а в альтернативних (логічних і контрольних) – чотири результати (крім двох безпомилкових, два результати з помилками першого та другого роду). Тоді кількість станів « m -вихідного» напівмарківського ланцюга, що описує процес, є в крайніх випадках: у разі абсолютно жорсткого алгоритму, що складається тільки з не альтернативних одиниць, $m=2^l$; у випадку абсолютно гнучкого алгоритму, що складається лише з альтернативних одиниць, $m=4^l=2^{2l}$. На кількість результатів впливає кількість типів помилок, що враховуються, які може здійснювати оператор при виконанні функції, що надійшла.

Завдання оптимізації виникає тоді, коли хоча б у деяких із m -станів є



можливість вибору способу дій. Оскільки в кожному i -му стані операції можуть виконувати K_i операторів, то кількість стратегій дорівнює: $K = \prod_{i=1} K_i$. Слід враховувати, що кожний із операторів може виконувати роботу S_i способами.

Тоді кількість стратегій дорівнює:
$$K = \prod_{i=1} K_i S_i$$
.

Таким чином, розмірність задачі оптимізації визначається величинами m , K_i та S_i . Як правило, здебільшого велике m , а розмірність K_i та S_i може бути суттєво скорочена шляхом попереднього відбору операторів, зайнятих виконанням регламентних завдань, таких, що перебувають на перерві, таких, що мають явно гірших способи дії та ін.

Залежно від конкретних умов функціонування системи, вимог щодо ефективності реалізації функцій, обмежень на умови діяльності операторів можливо безліч постановок задач вибору. Укрупнено процес прийняття рішення про закріплення функції охарактеризовано на рис.1. На етапі формування області допустимих рішень оператор-керівник повинен мати можливість відібрати незайнятих операторів, умови праці на робочому місці яких допускають залучення їх до виконання нової заявки. Виходячи з рекомендацій [103] щодо багаторівневої оцінки відповідності техніки інженерно-психологічним вимогам, наведеним у табл.1, та конкретних умов на момент надходження нової заявки виконуються такі роботи:

1. Визначення кількості операторів, які мають бути закріплені за виконанням заявки (один оператор, група операторів).
2. Визначення множини S_1 незайнятих операторів.
3. Визначення множини S_0 операторів, що виконують заявки (функції), реалізація яких може бути відмінена (призупинена).
4. Формування множини операторів $S = S_1 \cup S_0$, включених до розгляду.
5. Формування множини N непрагматичних показників групи "Показники інформаційного навантаження та напруженості оператора", що враховуються при вирішенні задачі, [24]: коефіцієнт завантаженості; період зайнятості; довжина черги; операційно-темпова напруженість.

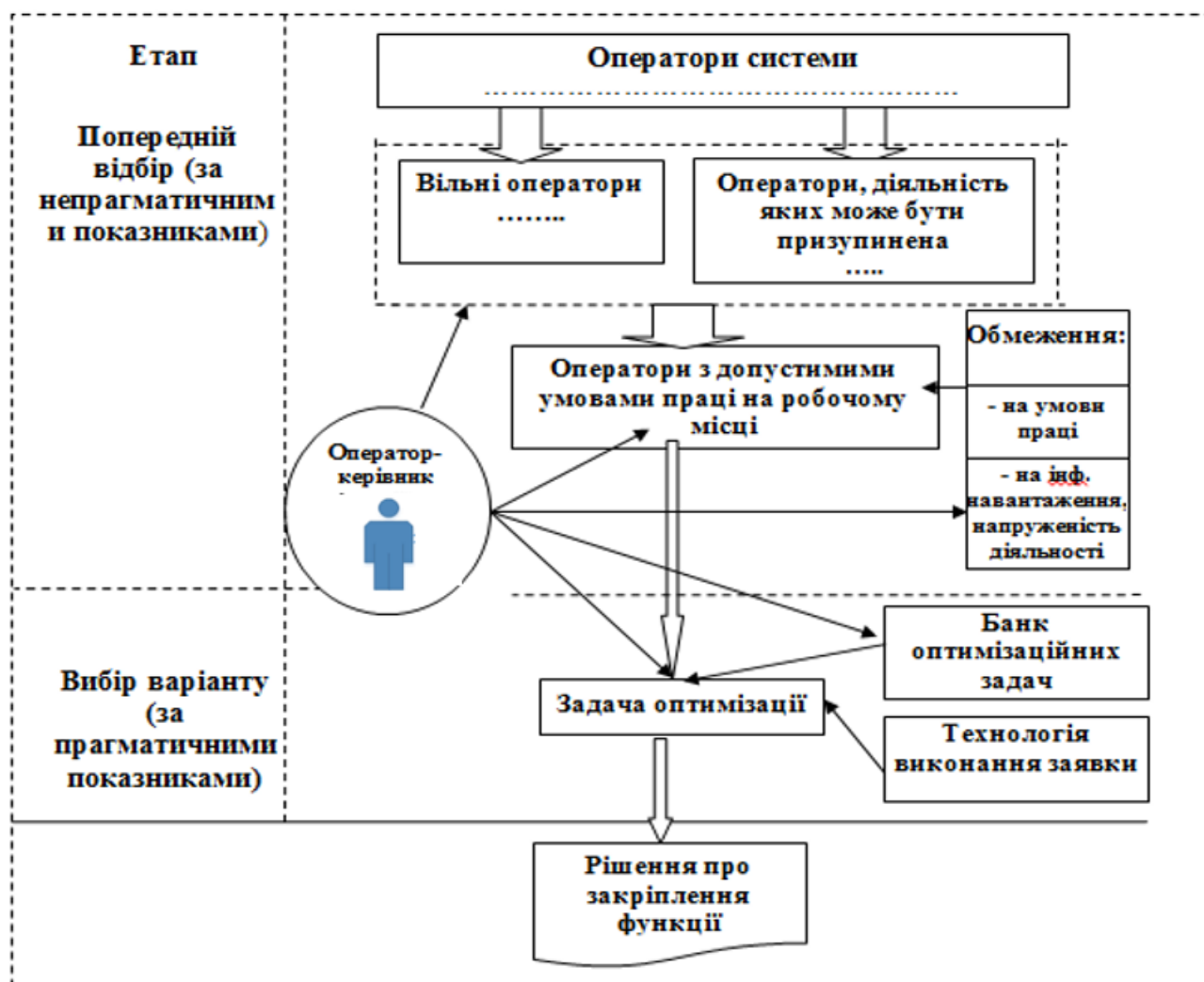


Рисунок 1 - Етапи прийняття рішень про закріплення функцій за операторами інформаційних систем

6. Визначити для кожного показника з множини N область допустимих значень.

7. Виключити з множини S операторів, для яких значення відповідних показників з множини N не знаходяться в області допустимих значень.

8. Для операторів із множини S оцінити умови праці на робочому місці.

9. Виключити з множини S операторів, для яких значення категорії тяжкості умов праці на робочому місці перевищує заданий рівень.

10. Виключити з множини S операторів, для яких значення відповідних показників з множини N не знаходяться в області допустимих значень.

11. Для операторів із множини S оцінити умови праці на робочому місці.

12. Виключити з множини S операторів, для яких значення категорії



тяжкості умов праці на робочому місці перевищує заданий рівень.

Таблиця 1 - Схема оцінки відповідності СЛМ інженерно-психологічним вимогам [24]

«Рівень»	Тип оцінки
1. Статична оцінка (оцінка відповідності конструкції інженерно-психологічним вимогам)	Оцінка розмірів робочого місця та його елементів
	Оцінка характеристик індикаторів та органів управління
	Оцінка взаємного розташування індикаторів та органів управління
2. Алгоритмічна оцінка (оцінка складності вирішення завдань)	Оцінка логічної складності алгоритму
	Оцінка стереотипності алгоритму
	Оцінка надійності та часу виконання алгоритму
3. Динамічна оцінка (оцінка складності інформаційних потоків)	Перевірка виконання гранично-допустимих норм діяльності оператора
	Оцінка швидкості надходження інформаційного потоку

Розглянемо, які специфічні моменти та особливості в задачу оптимізації людино-машинної взаємодії вносить завдання закріплення функцій між операторами. Розглянемо можливі ситуації вибору, характерні для діяльності оператора-керівника.

Класифікаційна ознака 1. ” Обмеження на вибір способу реалізації алгоритму функціонування ” – *PI*:

A – вид діяльності (індивідуальна, групова): *A*₁ – один оператор; *A*₂ – група операторів.

B – наявність альтернативних структур алгоритмів функціонування (способів реалізації заявки): *B*₁ – множина можливих структур (способів логіко-функціональних зв'язків між операціями, які повинні бути реалізовані для досягнення цілі, введення контрольних операцій та ін.); *B*₂ – єдиний варіант структури.

C – наявність альтернативних способів виконання окремих операцій алгоритмів функціонування: *C*₁ – множина можливих способів реалізації операцій; *C*₂ – єдиний спосіб.



D – необхідність обмежень на вибір способів виконання операцій (запровадження залежних операцій). Вводяться у разі, якщо є технологічні обмеження, коли спосіб виконання однієї операції може визначати способи виконання деяких інших (залежних): D_1 – є; D_2 – немає.

E – урахування зайнятості оператора виконанням інших заявок: E_1 – необхідний (якщо на попередньому етапі такий відбір неможливий чи не виконаний); E_2 – не актуальний.

F – урахування сумісності операторів в групі (тільки для виду діяльності A_2): F_1 – необхідний; F_2 – не виконується.

Класифікаційна ознака 2. "Модель алгоритму функціонування, на базі якої поставлена задача оптимізації" - $P2$: M_1 – функціональна мережа (ФМ) (граф робіт, що відображає логіко-функціональні зв'язки між операціями алгоритму (рис.2, а). Опис алгоритмів за допомогою ФС є первинним, найбільш природним та наочним. Однак ефективні алгоритми оптимізації на ФС обмежуються на практиці алгоритмами, що зводяться до алгоритмів послідовного типу);

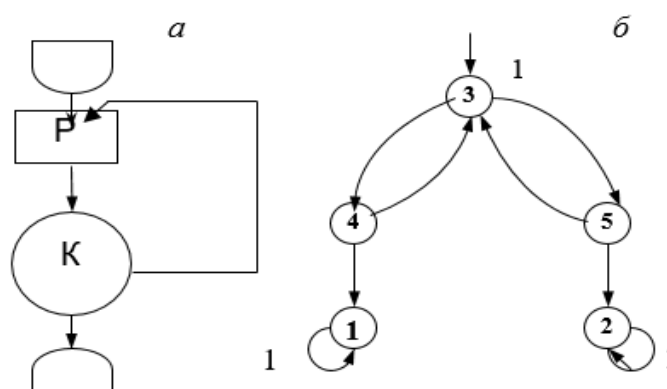


Рисунок 2 - Приклад моделі алгоритму виконання заявки: Граф робіт (а), граф подій (б)

M_2 – граф подій (відображає результати виконання операцій графа робіт, наприклад, "безпомилкове виконання операції", "виконання операції з помилкою" (рис.2, б). Дозволяє виконувати оптимізацію для алгоритмів довільної структури, проте вимагає попереднього переходу від графа робіт до графа подій, який у довільному випадку є досить трудомістким).

Класифікаційна ознака 3. "Кількість типів помилок операторів, що враховуються в моделі" – $P3$: X_1 – бінарна модель безпомилковості "є помилка -



немає помилки”; X_2 – n -арна модель безпомилковості (є можливість оцінити ймовірність виникнення помилок n типів, кожен тип помилки пов'язаний з деяким порушенням результату виконання технологічного процесу).

Класифікаційна ознака 4. ”Зміст цільової функції” – $P4$: Z_1 – максимум безпомилковості (для випадку X_1); Z_2 – мінімум втрат ефективності (для випадку X_2); Z_3 – інші (деталізуватимуться в міру необхідності).

Складемо класифікаційну таблицю для завдань вибору оптимального варіанта розподілу функцій між операторами відповідно до зазначених вище факторів (класифікаційних ознак), що впливають на організацію функціонування СОІУ (табл. 2). Для позначення задачі використовуємо послідовність символів Ω_{li}^n де:

$n=1$ означає, що модель АФ – граф подій;

$n=2$ означає, що модель АФ послідовного типу – граф робіт;

$l=1$ означає бінарну модель безпомилковості;

$l=2$ означає n -арну модель безпомилковості;

i – порядковий індекс задачі.

Для позначення обмежень та цільової функції оптимізаційної задачі використовуємо введені вище позначення класифікаційних ознак.

5.2. Вибір оптимального варіанту розподілу функцій між операторами на графі подій

У роботах [12, 17, 28] показано, що детермінована оптимізаційна задача для АФ ЕТС зводиться до пошуку оптимальної стратегії поглинаючого напівмарківського процесу з розподілу конкретних способів виконання операцій, що забезпечують збільшення ймовірності поглинання процесу в заданий поглинаючий стан r , що відповідає безпомилковому результату виконання АФ, яка вирішується як задача частково-цілочисленного програмування.



Таблиця 2 - Класифікація задач оптимального закріплення функцій

№ п/п	Задача		Характеристика моделі (обмеження, цільова функція)	
	Назва	Позначення	Модель АФ – граф подій	Модель АФ последовного типу – граф робіт
1	2	3	4	5
1	Оптимізація вибору операторів без обмеження на час виконання операцій	Ω_{11}^1	$A_2B_2C_2D_2E_2F_2M_2X_1Z_1$	–
		Ω_{11}^2	–	$A_2B_2C_2D_2E_2F_2M_1X_1Z_1$
2	Оптимізація вибору операторів з урахуванням зайнятості операторів	Ω_{12}^1	$A_2B_2C_2D_2E_1F_2M_2X_1Z_1$	–
		Ω_{12}^2	–	$A_2B_2C_2D_2E_1F_2M_1X_1Z_1$
3	Оптимізація вибору операторів та способів виконання операцій	Ω_{13}^1	$A_2B_2C_1D_2E_2F_2M_2X_1Z_1$	–
		Ω_{13}^2	–	$A_2B_2C_1D_2E_2F_2M_1X_1Z_1$
4	Оптимізація вибору операторів та способів виконання операцій з урахуванням зайнятості операторів	Ω_{14}^1	$A_2B_2C_1D_2E_1F_2M_2X_1Z_1$	–
		Ω_{14}^2	–	$A_2B_2C_1D_2E_1F_2M_1X_1Z_1$
5	Оптимізація вибору операторів при наявності залежних операцій	Ω_{15}^1	$A_2B_2C_2D_1E_2F_2M_2X_1Z_1$	–
		Ω_{15}^2	–	$A_2B_2C_2D_1E_2F_2M_1X_1Z_1$
6	Оптимізація вибору одного оператора для виконання АФ функції, що надійшла, при наявності залежних операцій	Ω_{16}^1	$A_1B_2C_2D_1E_2F_2M_2X_1Z_1$	–
		Ω_{16}^2	–	$A_1B_2C_2D_1E_2F_2M_1X_1Z_1$
7	Оптимізація вибору операторів при наявності залежних операцій з урахуванням зайнятості операторів	Ω_{17}^1	$A_2B_2C_2D_1E_1F_2M_2X_1Z_1$	–
		Ω_{17}^2	–	$A_2B_2C_2D_1E_1F_2M_1X_1Z_1$
8	Оптимізація вибору операторів з урахуванням сумісності роботи операторів	Ω_{18}^1	$A_2B_2C_2D_2E_2F_1M_2X_1Z_1$	–
		Ω_{18}^2	–	$A_2B_2C_2D_2E_2F_1M_1X_1Z_1$
9	Оптимізація вибору операторів з урахуванням сумісності роботи операторів та наявності залежних операцій	Ω_{19}^1	$A_2B_2C_2D_1E_2F_1M_2X_1Z_1$	–
		Ω_{19}^2	–	$A_2B_2C_2D_1E_2F_1M_1X_1Z_1$
10	Оптимізація вибору операторів з урахуванням допустимості використання оператора на даному часовому інтервалі	Ω_{110}^1	$A_2B_2C_2D_2E_1F_2M_2X_1Z_1$	–
		Ω_{110}^2	–	$A_2B_2C_2D_2E_1F_2M_1X_1Z_1$



Продовження таблиці 2

1	2	3	4	5
11	Оптимізація вибору операторів без обмеження на час виконання операцій з урахуванням помилок різних типів	Ω_{21}^1	$A_2B_2C_2D_2E_2F_2M_2X_2Z_2$	–
		Ω_{21}^2	–	$A_2B_2C_2D_2E_2F_2M_1X_2Z_2$
12	Оптимізація вибору операторів з урахуванням зайнятості операторів та урахуванням помилок різних типів	Ω_{22}^1	$A_2B_2C_2D_2E_1F_2M_2X_2Z_2$	–
		Ω_{22}^2	–	$A_2B_2C_2D_2E_1F_2M_1X_2Z_2$
13	Оптимізація вибору операторів та способів виконання операцій з урахуванням помилок різних типів	Ω_{23}^1	$A_2B_2C_1D_2E_2F_2M_2X_2Z_2$	–
		Ω_{23}^2	–	$A_2B_2C_1D_2E_2F_2M_1X_2Z_2$
14	Оптимізація вибору операторів та способів виконання операцій з урахуванням зайнятості операторів та помилок різних типів	Ω_{24}^1	$A_2B_2C_1D_2E_1F_2M_2X_2Z_2$	–
		Ω_{24}^2	–	$A_2B_2C_1D_2E_1F_2M_1X_2Z_2$
15	Оптимізація вибору операторів при наявності залежних операцій з урахуванням помилок різних типів	Ω_{25}^1	$A_2B_2C_2D_1E_2F_2M_2X_2Z_2$	–
		Ω_{25}^2	–	$A_2B_2C_2D_1E_2F_2M_1X_2Z_2$
16	Оптимізація вибору одного оператора для виконання АФ функції, що надійшла, при наявності залежних операцій та з урахуванням помилок різних типів	Ω_{26}^1	$A_1B_2C_2D_1E_2F_2M_2X_2Z_2$	–
		Ω_{26}^2	–	$A_1B_2C_2D_1E_2F_2M_1X_2Z_2$
17	Оптимізація вибору операторів при наявності залежних операцій з урахуванням зайнятості операторів та помилок різних типів	Ω_{27}^1	$A_2B_2C_2D_1E_1F_2M_2X_2Z_2$	–
		Ω_{27}^2	–	$A_2B_2C_2D_1E_1F_2M_1X_2Z_2$
18	Оптимізація вибору операторів при урахуванні сумісності роботи операторів та помилок різних типів	Ω_{28}^1	$A_2B_2C_2D_2E_2F_1M_2X_2Z_2$	–
		Ω_{28}^2	–	$A_2B_2C_2D_2E_2F_1M_1X_2Z_2$
19	Оптимізація вибору операторів при урахуванні сумісності роботи операторів, наявності залежних операцій та помилок різних типів	Ω_{29}^1	$A_2B_2C_2D_1E_2F_1M_2X_2Z_2$	–
		Ω_{29}^2	–	$A_2B_2C_2D_1E_2F_1M_1X_2Z_2$
20	Оптимізація вибору операторів з урахуванням допустимості використання оператора на даному часовому інтервалі та з урахуванням помилок різних типів	Ω_{210}^1	$A_2B_2C_2D_2E_1F_2M_2X_2Z_2$	–
		Ω_{210}^2	–	$A_2B_2C_2D_2E_1F_2M_1X_2Z_2$



Використовуємо ці висновки при постановці та вирішенні задачі оптимального закріплення функцій за операторами.

Введемо загальні для всіх задач, зазначених у табл.2, позначення змінних. Позначимо через K множину усіх операторів СОІУ. Кожному варіанту закінчення функціонування процесу діяльності на графі подій ставимо у відповідність свій поглинаючий стан, наприклад, «безпомилкове виконання» процесу та його помилкове виконання. Поглинаючі вершини нумеруємо першими r натуральними числами (r – кількість поглинаючих вершин). До них входять цікаві для нас позитивні результати r_l . Для початкових вершин, які нумеруються числами з числової послідовності після перших r поглинаючих вершин, задамо вектор початкових ймовірностей, тобто ймовірності знаходження системи у початкових станах у відповідних вершинах графа подій:

$$a = (a_{r+1}, a_{r+2}, \dots, a_n), \quad \text{при цьому :} \quad \sum_{i=r+1}^N a_i = 1, \quad (11)$$

де N – загальна кількість вершин, із яких перші r – поглинаючі.

В кожній вершині i може бути K_i альтернатив або рішень (роботу можуть виконувати $K_i \in K$ операторів). Кожному рішенню відповідає свій набір переходів, який характеризується ймовірністю переходу із вершини i в вершину j при виборі k -го рішення, $k \in K_i$. В умовах задачі закріплення оператора за функціями, що надійшли, k -е рішення означає призначення оператора $k \in K_i \in K$ на етап технологічного процесу, який моделюється вершиною i графа подій. $P_{ij}^{(k)}$ – ймовірність переходу системи із вершини i в вершину j при виборі k -го рішення. Причому:

$$\sum_j P_{ij}^{(k)} = 1 \quad \text{при всіх } i \text{ та при всіх } k \in K_i. \quad (12)$$

$T_{ij}^{(k)}$ – середній час i -ї роботи при k -му рішенні при переході у вершину j .

У цьому випадку середній очікуваний час i -ї роботи при k -му рішенні $T_i^{(k)}$ обчислюються за такою формулою:

$$T_i^{(k)} = \sum_j P_{ij}^{(k)} T_{ij}^{(k)}. \quad (13)$$



Під оптимізацією системи розуміється вибір у кожній вершині такого рішення (альтернативи), щоб цільова функція набувала екстремального значення. Можливі такі цільові функції:

- 1) P_r – ймовірність поглинання в r -стан (або в станах r -го типу);
- 2) T – середній час процесу до поглинання.

Також можливе задання обмежень на ту з функцій P_r , чи T , яка не є цільовою, у вигляді $\leq$ або $\geq$. Це розширює постановку задачі, порівнюючи з постановкою задачі, вказаній в [19].

Задача Ω_{11}^1 – оптимізація вибору операторів без обмеження на час виконання операцій. Результатами оптимізації є:

1. Значення цільової функції та всіх описаних функцій (P_r , T);
2. Номер рішення у кожній вершині, що доставляє екстремум цільової функції.

При постановці задачі оптимізації як задачі лінійного програмування, цільові функції для задачі Ω_{11}^1 мають вигляд:

$$P_r = \sum_l \sum_{i=r+1}^N \sum_{k \in K_i} P_{il}^{(k)} x_i^{(k)}, \quad (14)$$

$$T = \sum_{i=r+1}^N \sum_{k \in K_i} T_i^{(k)} x_i^{(k)}. \quad (15)$$

Як цільову функцію беремо функцію P_r - ймовірність поглинання в r -стані, формула (14).

В формулах (14)-(15) $x_i^{(k)}$ – змінна, яка характеризує вибір рішення:

$x_i^{(k)} > 0$ в тому випадку, коли в i -й вершині для виконання роботи вибрано k -е рішення, і $x_i^{(k)} = 0$, в протилежному випадку.

Таким чином, задача оптимізації без обмежень на час виконання операцій T , без залежних рішень (будь-який оператор може виконувати будь-яку операцію алгоритму функціонування будь-яким способом) і за умови, що всі оператори



можуть бути задіяні на виконання заявки, що надійшла, має вигляд:

$$P_r = \sum_l \sum_{i=r+1}^N \sum_{k \in K_i} P_{il}^{(k)} x_i^{(k)} \longrightarrow \max ; \quad (16)$$

при обмеженнях:

$$\sum_{k \in K_i} x_j^{(k)} - \sum_{i=r+1}^N \sum_{k \in K_i} P_{ij}^{(k)} x_i^{(k)} = a_j, \quad j=r+1, r+2, \dots, N; \quad (17)$$

$$\sum_{j=1}^r \sum_{i=r+1}^N \sum_{k \in K_i} P_{ij}^{(k)} x_i^{(k)} = 1; \quad (18)$$

$$x_i^{(k)} \geq 0 \quad \text{для кожного } i \text{ та для кожного } k \in K_i. \quad (19)$$

Обмеження (18) є нормуючою умовою, яка вимагає, щоб з ймовірністю 1 процес поглинувся.

Розв'язання даної задачі лінійного програмування (16)–(19) має таку властивість, що для кожного i тільки один $x_i^{(k)}$ відмінний від нуля. Це означає, що у вершині i для виконання роботи приймається k -е рішення, $k \in K_i$. В умовах завдання закріплення за операторами системи функцій, які надходять на виконання, це означає, що на етапи технологічного процесу, які моделюються i -ми вершинами графа подій, призначається оператор $k \in K_i \in K$.

Введемо матрицю $U=[u_{nl}]$, що відображає відповідність вершин графа подій операціям графа робіт:

- розмірність матриці – $n_0 \times L$;
- кількість рядків матриці n_0 дорівнює кількості операцій графа робіт;
- кількість стовбців матриці L – максимальна кількість вершин графа подій, що відповідає одній із операцій графа робіт;
- ненульові елементи рядка n матриці $[u_{nl}]$ – це номери вершин графа подій, що моделюють n -у операцію графа робіт.

Приклад матриці відповідності $U=[u_{nl}]$ наведемо для графа робіт типової функціональної структури «робоча – контроль функціонування» (рис. 2, а):



$$[u_{nl}] = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Координати вектора $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}\}$ (формула (3)), що характеризує варіант закріплення функції, що надійшла, за операторами, визначається через значення змінних $x_i^{(k)}$ та елементи матриці відповідності $[u_{nl}]$ наступним чином:

1. Розмірність вектора X закріплення функції, що надійшла, дорівнює кількості операцій графа робіт – n_0 .

2. Значення n -ї координати вектора дорівнює верхньому індексу ненульової змінної $x_i^{(k)}$, якщо її нижній індекс співпадає з номером вершини графа подій, що моделює n -у операцію графа робіт:

$$x_n = k, \text{ если } x_i^{(k)} > 0 \text{ и } i = u_{nl}, \quad n = 1, 2, \dots, n_0. \quad (20)$$

Таким чином, ми знаходимо оптимальне рішення в кожній вершині, а, значить, оптимальну стратегію для системи.

Задача Ω_{12}^1 – оптимізація вибору операторів з урахуванням зайнятості операторів. Необхідно участь занятость оператора, а также возможность использования оператора в результате анализа условий труда на рабочем месте. Модель зайнятості оператора [62] дозволяє визначити для кожного оператора на заданому інтервалі часу $[t_n^1, t_n^2]$ відрізок часу $[z_1^{(k)}, z_2^{(k)}]$, зайнятий оператором для виконання регламентної функції. Якщо k -й оператор вільний на заданому інтервалі часу від виконання регламентної функції, то $z_1^{(k)} = 0$ і $z_2^{(k)} = 0$. Тоді для урахування зайнятості операторів до задачі оптимізації (16)-(19) додається обмеження за часом, вводяться булеві змінні $\delta_i^{(k)}$ (для виконання роботи на етапі технологічного процесу, що моделюється вершиною i графа подій, k -м оператор) та додаються нові обмеження:

$$\sum_{i=r+1}^N \sum_j P_{ij}^{(k)} T_{ij}^{(k)} x_i^{(k)} \leq T_0 - z_2^{(k)} + z_1^{(k)} \quad \text{для кожного } k \in K_i; \quad (21)$$



$$\sum_{k \in K_i} \delta_i^{(k)} = 1 \quad \text{для кожного } i; \quad (22)$$

$$x_i^{(k)} - M\delta_i^{(k)} \leq 0 \quad \text{для кожного } i \text{ та для кожного } k \in K_i; \quad (23)$$

$$x_i^{(k)} - m\delta_i^{(k)} \geq 0 \quad \text{для кожного } i \text{ та для кожного } k \in K_i; \quad (24)$$

де m та M – достатньо мале й достатньо велике число, відповідно. Зміст указаних обмежень наступний:

1) обмеження (22) для булевої змінної $\delta_i^{(k)}$ вимагає, щоб для кожного i тільки одне $\delta_i^{(k)}$ було рівне одиниці. Це означає, що в кожній вершині i для виконання роботи приймається тільки одне k -е рішення, $k \in K_i$;

2) обмеження (23) вимагає, щоб при кожному i не більше ніж одне $x_i^{(k)}$ було відмінне від нуля (разом з обмеженням (19));

3) обмеження (24) вимагає, щоб при кожному i одне або більше $x_i^{(k)}$ було відмінне від нуля. Разом (23) и (24) вимагають, щоб лише одне $x_i^{(k)}$ було відмінне від нуля.

Координати вектора закріплення функції X визначаються через розв'язання задачі $\Omega_{12}^1 \{(16)–(19), (21)–(24)\}$ за формулою (20). При цьому враховується, що k -й оператор може бути зайнятий виконанням регламентної функції на інтервалі часу $[z_1^{(k)}, z_2^{(k)}]$. Тим самим зменшується директивний час виконання k -м оператором функції, що надійшла на величину $z_2^{(k)} - z_1^{(k)}$.

Якщо в задачі $\Omega_{12}^1 \{(16)–(19), (21)–(24)\}$ обмеження (21) замінити на

обмеження вигляду: $\sum_{i=r+1}^N \sum_j \sum_{k \in K_i} P_{ij}^{(k)} T_{ij}^{(k)} x_i^{(k)} \leq T_0$, то отримаємо задачу оптимізації вибору оператора з урахуванням обмеження на середній час виконання алгоритму діяльності. Вказане обмеження позначимо формулою (21¹).



Задача Ω_{13}^1 - оптимізація вибору операторів і способів виконання операцій. Дана задача відрізняється від задачі Ω_{11}^1 тим, що в кожній вершині i в кожного оператора $k \in K_i$ може бути S_i^k способів виконання роботи, тобто альтернатив або рішень. Кожному рішенню відповідає свій набір переходів, що характеризується ймовірністю переходу з вершини i у вершину j при виборі k -м оператором s -го способу виконання роботи, $s \in S_i^k$. Додавимо в іменах введених раніше змінних індекс s , що означає спосіб виконання роботи.

P_{ijs} – ймовірність переходу системи із вершини i у вершину j при виконанні k -м оператором роботи (операції) способом s . Причому:

$$\sum_j P_{ijs}^{(k)} = 1 \quad \text{для кожного } i, \text{ для кожного } k \text{ та для кожного } s \in S_i^k, \quad (25)$$

$T_{ijs}^{(k)}$ – середній час i -ї роботи при виконанні її k -м оператором способом s при переході у вершину j .

$x_{is}^{(k)}$ – змінна, що характеризує вибір рішення: $x_{is}^{(k)} > 0$ в тому випадку, коли в i -й вершині для виконання роботи вибраний k -й оператор, $k \in K_i$, і цей оператор виконує роботу s -м способом, $s \in S_i^k$. Тоді задача оптимізації вибору варіанта призначення операторів на етапи технологічного процесу з урахуванням способів виконання робіт має вигляд:

$$P_r = \sum_l \sum_{i=r+1}^N \sum_{k \in K_i} \sum_{s \in S_i^k} P_{ils}^{(k)} x_{is}^{(k)} \rightarrow \max; \quad (26)$$

$$\sum_{k \in K_i} \sum_{s \in S_i^k} x_{js}^{(k)} - \sum_{i=r+1}^N \sum_{k \in K_i} \sum_{s \in S_i^k} P_{ijs}^{(k)} x_{is}^{(k)} = a_j, \quad j=r+1, r+2, \dots, N; \quad (27)$$

$$\sum_j \sum_{i=r+1}^N \sum_{k \in K_i} \sum_{s \in S_i^k} P_{ijs}^{(k)} x_{is}^{(k)} = 1; \quad (28)$$

$$x_{is}^{(k)} \geq 0 \quad \text{для кожного } i, \text{ для кожного } k \in K_i \text{ та для кожного } s \in S_i^k. \quad (29)$$



Розв'язання задачі (26)–(29) має таку властивість, що для кожного i тільки один $x_{is}^{(k)}$ відмінний від нуля. Це означає, що у вершині i для виконання роботи приймається k -е рішення, $k \in K_i$, спосіб виконання – $s \in S_i^k$. Оскільки в цій задачі оптимальний варіант закріплення функції за операторами повинен відображати для кожної операції алгоритму діяльності не тільки призначеного оператора, а й спосіб виконання оператором цієї операції, то замість вектора закріплення $X\{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}\}$, введемо поняття матриці закріплення функції за операторами системи:

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \\ \dots & \dots \\ y_{n_0 1} & y_{n_0 2} \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Елементи матриці $Y=[y_{ij}]$, що характеризують варіант закріплення функції, що надійшла за операторами, визначаються через значення змінних $x_{is}^{(k)}$ та елементи матриці відповідності $[u_{ni}]$ таким чином:

1. Розмірність матриці закріплення функції Y , що надійшла, дорівнює $n_0 \times 2$. n_0 - кількість операцій алгоритму функціонування, який реалізує функцію, що надійшла. Номер рядка матриці означає номер операції алгоритму функціонування.

2. Значення елементів першого стовпця матриці характеризують вибір оператора на кожну операцію алгоритму:

$$y_{n1} = k, \text{ якщо } x_{is}^{(k)} > 0; \text{ та } i = u_{ni}, n = 1, 2, \dots, n_0.$$

3. Значення елементів другого стовпця матриці означають спосіб виконання операції алгоритму оператором, що позначений відповідним елементом першого стовпця матриці:

$$y_{n2} = s, \text{ якщо } x_{is}^{(k)} > 0 \text{ та } i = u_{ni}, n = 1, 2, \dots, n_0.$$

Задача Ω_{14}^1 – оптимізація вибору операторів та способів виконання операцій з урахуванням зайнятості операторів. Дана задача відрізняється від



задачі Ω_{13}^1 (26)–(29) тим, що додається обмеження за часом аналогічно до обмеження (21) задачі Ω_{12}^1 . Вводяться булеві змінні $\delta_{is}^{(k)}$ (для виконання у вершині i операції k -м оператор s -м способом) та додаються нові обмеження:

$$\sum_{i=r+1}^N \sum_{s \in S_i^k} \sum_j P_{ijs}^{(k)} T_{ijs}^{(k)} x_{is}^{(k)} \leq T_0 - z_2^{(k)} + z_1^{(k)} \quad \text{для кожного } k \in K_i; \quad (31)$$

$$\sum_{k \in K_i} \sum_{s \in S_i^k} \delta_{is}^{(k)} = 1 \quad \text{для кожного } i \text{ та } k \in K_i; \quad (32)$$

$$x_{is}^{(k)} - M \delta_{is}^{(k)} \leq 0 \quad \text{для кожного } i, \text{ для кожного } k \in K_i \text{ та для кожного } s \in S_i^k; \quad (33)$$

$$x_{is}^{(k)} - m \delta_{is}^{(k)} \geq 0 \quad \text{для кожного } i, \text{ для кожного } k \in K_i \text{ та для кожного } s \in S_i^k; \quad (34)$$

де m та M – достатньо мале та достатньо велике число.

Зміст указаних обмежень такий:

1. обмеження (32) для булевої змінної $\delta_{is}^{(k)}$ вимагає, щоб для кожного i тільки одне $\delta_{is}^{(k)}$ було рівно одиниці. Це означає, що в кожній вершині i робота виконується тільки одним оператором k , і для виконання роботи оператор застосовує тільки один спосіб s ;

2. обмеження (33) вимагає, щоб для кожного i не більше, ніж одне $x_{is}^{(k)}$ було відмінне від нуля (разом з обмеженням (29));

3. обмеження (34) вимагає, щоб для кожного i одне або більше $x_{is}^{(k)}$ було відмінне від нуля. Разом (33) та (34) відмінне від нуля тільки одне $x_{is}^{(k)}$ було відмінне від нуля.

Аналогічно попередній задачі Ω_{13}^1 , елементи матриці $Y=[y_{ij}]$ (30), що характеризують варіант закріплення функції, що надійшла за операторами, визначається через значення змінних $x_{is}^{(k)}$ та елементи матриці відповідності $[u_{nl}]$. При цьому враховується, що k -й оператор може бути зайнятий виконанням



регламентної функції на інтервалі часу $[z_1^{(k)}, z_2^{(k)}]$. Тим самим зменшується директивний час виконання k -м оператором функції, що надійшла на величину $z_2^{(k)} - z_1^{(k)}$.

Якщо в задачі $\Omega_{14}^1 \{(26) - (29), (31) - (34)\}$ обмеження (31) замінити на

обмеження вигляду:
$$\sum_{i=r+1}^N \sum_{s \in S_i^k} \sum_j \sum_{k \in K_i} P_{ijs}^{(k)} T_{ijs}^{(k)} x_{is}^{(k)} \leq T_0$$
, тоді отримаємо задачу вибору операторів та способів виконання операцій з обмеженням на середній час виконання алгоритму діяльності.

Задача Ω_{15}^1 – оптимізація вибору операторів при наявності залежних операцій. У випадку залежних рішень (операції, що моделюються вершинами $l, m, \dots, n$, виконуються одним і тим же оператором) до задачі Ω_{11}^1 додаються булеві змінні $\delta_i^{(k)}$ та умови:

$$\delta_l^{(k)} = \delta_m^{(k)} = \dots = \delta_n^{(k)} \quad \text{для кожного } k \in K_i. \quad (35)$$

Це обмеження вимагає, щоб для залежних станів рішення збігалися. Координати вектора закріплення функції X визначаються через розв'язання задачі $\Omega_{15}^1 \{(16) - (19), (22) - (24), (35)\}$ за формулою (20).

Задача Ω_{16}^1 – оптимізація вибору одного оператора для виконання АФ функції, що надійшла. Цю задачу можна розглядати як один із варіантів задачі Ω_{15}^1 за умови, що всі операції алгоритму діяльності виконуються одним оператором з усіх можливих.

Маємо випадок залежних рішень у всіх вершинах графа подій. Для вирішення задачі зручніше замість умов (22), (23), (24), (35) відразу скоротити кількість обмежень і змінних, ввівши для всіх вершин (усі вершини – залежні) булеві змінні $\delta^{(k)}$, $k \in K$. Тоді обмеження (22), (23), (24), (35) замінюються обмеженнями:



$$\sum_{k \in K} \delta^{(k)} = 1 \quad ; \quad (36)$$

$$x_i^{(k)} - M\delta^{(k)} \leq 0 \quad \text{для кожного } i, \text{ кожного } k \in K_i \quad (37)$$

$$x_i^{(k)} - m\delta^{(k)} \geq 0, \quad \text{для кожного } i, \text{ кожного } k \in K_i. \quad (38)$$

Обмеження (36), (37) та (5.38) мають той же зміст, що і обмеження (22), (23) та (24) задачі Ω_{12}^1 , відповідно.

Координати вектора закріплення функції X визначаються через рішення задачі $\Omega_{16}^1 \{(16) - (19), (36) - (38)\}$ за формулою (20).

Задача Ω_{17}^1 – оптимізація вибору операторів при наявності залежних операцій з урахуванням зайнятості операторів. Дана задача відрізняється від задачі $\Omega_{15}^1 \{(16) - (19), (22) - (24), (35)\}$ тим, що додається умова зайнятості операторів. Зайнятість враховується обмеженням, аналогічним до обмеження (5.21) задачі Ω_{12}^1 . Обмеження (17) – (19), (21) – (24) мають той же зміст, що і обмеження задачі Ω_{12}^1 , відповідно. Обмеження (36) означає, що у вершинах $l, m, \dots, n$ приймається одне й те саме рішення. Координати вектора закріплення функції X визначається через рішення задачі $\Omega_{17}^1 \{(16) - (19), (21) - (5.24), (5.35)\}$ за формулою (20). При цьому враховується, що k -й оператор може бути зайнятий виконанням регламентної функції на інтервалі часу. $[z_1^{(k)}, z_2^{(k)}]$.

Якщо в задачі Ω_{17}^1 замінити обмеження (21) на обмеження вигляду

$$\sum_{i=r+1}^N \sum_j P_{ij}^{(k)} T_{ij}^{(k)} x_i^{(k)} \leq T_0$$

, тоді отримаємо задачу вибору операторів при наявності залежних операцій з обмеженням на середній час виконання алгоритму діяльності.

Задача Ω_{18}^1 – оптимізація вибору операторів з урахуванням сумісності



роботи операторів. Ця задача враховує той факт, що не всі оператори можуть бути задіяні разом на виконання операцій алгоритму функціонування, що реалізує функцію, яка надійшла. Перш ніж визначити оптимальне призначення операторів на етапи технологічного процесу, необхідно скласти групи операторів, спільна робота яких над алгоритмом діяльності можлива. Далі визначається оптимальне закріплення операторів кожної групи. Результатом розв'язання оптимізаційної задачі є вектор закріплення, що дає максимум цільової функції серед усіх можливих груп сумісних операторів.

Для відображення спільної роботи операторів системи, попарно введемо матрицю сумісності, розмірність якої дорівнює $K_0 \times K_0$, де K_0 – кількість операторів системи:

$$[C_{nl}] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & \dots & c_{1K_0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{K_0 1} & c_{K_0 2} & \dots & \dots & c_{K_0 K_0} \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Елементи матриці визначаються таким чином:

$$c_{nl} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } n\text{-й та } l\text{-й оператори можуть бути сумісно задіяні, або } n=l \\ 0, \text{ якщо } n\text{-й та } l\text{-й оператори не можуть бути сумісно задіяні} \end{cases} \quad (40)$$

Для формалізації складання груп операторів, які можуть бути задіяні на виконання алгоритму функціонування спільно, використовуємо поняття сполучень та виробляючих функцій:

Сполучення із n різних об'єктів $A_1, A_2, \dots, A_n$ по i без повторень можуть бути отримані як коефіцієнти α_i виробляючих функцій:

$$F(s) = \sum_{i=0}^n \alpha_i s^i = (1 + A_1 s)(1 + A_2 s) \dots (1 + A_n s). \quad (41)$$

Кількість таких сполучень дорівнює коефіцієнту $\alpha_i = C_n^i$ перелічувальної функції:

$$F_*(s) = \sum_{i=0}^n \alpha_i s^i = (1 + s)^n. \quad (42)$$

Значення для α_i в цьому випадку можна також визначити як число сполучень



із n об'єктів по i об'єктів без повторень:

$$\alpha_i = \frac{n!}{(n-i)!i!} \quad (43)$$

Для прикладу розглянемо сполучення із 4-х різних об'єктів по $i=1,2,3,4$:

$$\begin{aligned} F(s) = \sum_{i=0}^4 \alpha_i s^i &= (1+A_1s)(1+A_2s)(1+A_3s)(1+A_4s) = s^0 + (A_1+A_2+A_3+A_4)s^1 + \\ &+ (A_1A_2+A_1A_3+A_1A_4+A_2A_3+A_2A_4+A_3A_4)s^2 + (A_2A_3A_4+A_1A_3A_4+A_1A_2A_4+A_1A_2A_3)s^3 + \\ &+ (A_1A_2A_3A_4)s^4. \end{aligned} \quad (44)$$

Коефіцієнти α_i ($i=1,2,3,4$) дорівнюють, відповідно, виразам:

$$\alpha_1 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4; \quad (45)$$

$$\alpha_2 = A_1A_2 + A_1A_3 + A_1A_4 + A_2A_3 + A_2A_4 + A_3A_4; \quad (46)$$

$$\alpha_3 = A_1A_2A_3 + A_1A_2A_4 + A_1A_3A_4 + A_2A_3A_4; \quad (47)$$

$$\alpha_4 = A_1A_2A_3A_4. \quad (48)$$

Розглянутий приклад показує, що для множини, що складається з 4-х різних елементів A_1, A_2, A_3, A_4 існує 4 сполучення по одному елементу (A_1, A_2, A_3, A_4), 6 сполучень по два елементи ($A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_2A_3, A_2A_4, A_3A_4$), 4 сполучення по три елементи ($A_2A_3A_4, A_1A_3A_4, A_1A_2A_4, A_1A_2A_3$) і одне сполучення по чотири елементи ($A_1A_2A_3A_4$).

Для подальшого моделювання використовуємо введені раніше позначення: K_0 – множина операторів системи; $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ – елементи множини K_0 .

Група, утворена i операторами, – це одно із $C_{K_0}^i$ сполучень елементів множини K_0 по i елементів.

Всі можливі сполучення, що моделюють всі можливі групи із i операторів, визначаємо як коефіцієнти виробляючої функції при s^i :

$$F(s) = \sum_{i=0}^{K_0} \alpha_i s^i = (1+k_1s)(1+k_2s)\dots(1+k_{K_0}s), \quad (49)$$

де s – будь-яке дійсне число.

Аналогічно попередньому прикладу, для множини операторів, що складається з 4-х різних операторів k_1, k_2, k_3, k_4 , існує 4-и групи по одному оператору (k_1, k_2, k_3, k_4), 6 різних груп по два оператори ($k_1k_2, k_1k_3, k_1k_4, k_2k_3, k_2k_4,$



k_3k_4), 4-и різних групи по три оператори ($k_2k_3k_4$, $k_1k_3k_4$, $k_1k_2k_4$, $k_1k_2k_3$) та одна група, що складається із 4-х операторів ($k_1k_2k_3k_4$).

У загальному вигляді сполучення елементів множини K_0 по i елементів запишеться наступним чином:

$$k_{h_1} k_{h_2} \dots k_{h_i}, \quad (50)$$

де $h_1 = 1, 2, 3, \dots, K_0$; $h_2 = 2, 3, 4, \dots, K_0$; $h_i = i, i+1, i+2, \dots, K_0$; $i = 1, 2, \dots, K_0$

Кожному отриманому сполученню (50) поставимо у відповідність послідовність $G = \{g_j\}$ із K_0 елементів:

$$g_j = \begin{cases} 1, & \text{якщо в сполученні (50) } \exists h_i = j \\ 0, & \text{в протилежному випадку} \end{cases} \quad (51)$$

де $j = 1, 2, \dots, K_0$; $l = 1, 2, \dots, i$.

Наприклад, для 4-х різних груп по три оператори ($k_2k_3k_4$, $k_1k_3k_4$, $k_1k_2k_4$, $k_1k_2k_3$) отримаємо наступні чотири послідовності:

$$q_1 = \{0, 1, 1, 1\}; q_2 = \{1, 0, 1, 1\}; q_3 = \{1, 1, 0, 1\}; q_4 = \{1, 1, 1, 0\}.$$

Виходячи із заданої попарно допустимої спільної роботи операторів (матриця $[C_{nl}]$ – формула (39)) та отриманих всіх можливих сполучень, що моделюють всі можливі групи по i операторів із K_0 операторів (коефіцієнти α_i – формули (49) та (50)), сформуємо матрицю $[Q_{mj}]$, кожен рядок якої містить K_0 нульових та одиничних елементів і відображає одне із сполучень по i елементів із K_0 елементів.

Кожен рядок матриці $[Q_{mj}]$ формується із послідовності $G = \{g_j\}$, що відповідає сполученню (50) та отриманий за формулою (51), наступним чином:

$$q_{mj} = g_j, \quad \text{якщо} \quad c_{h_1h_2} c_{h_1h_3} \dots c_{h_{i-1}h_i} > 0, \quad (52)$$

де $m = 1, 2, 3, \dots$ – номер поточного рядка матриці $[Q_{mj}]$;

$j = 1, 2, \dots, K_0$ – номер стовбця матриці $[Q_{mj}]$;

$c_{h_n h_l}$ – елемент матриці (39), що знаходиться на перетині h_n рядка та h_l стовбця;

$h_n h_l$ – одне із можливих сполучень із i елементів $h_1, h_2, \dots, h_i$ по два елементи



в кожному. Всі можливі такі сполучення визначаємо як коефіцієнт виробляючої функції при s^2 :

$$F(s) = \sum_{u=0}^i \alpha_u s^u = (1 + h_1 s)(1 + h_2 s) \dots (1 + h_i s) \quad (53)$$

Отриманий таким чином рядок матриці $[Q_{mj}]$ моделює одну із груп операторів, які можуть бути задіяні на виконання алгоритму функціонування спільно. Таким чином, матриця $[Q_{mj}]$ моделює допустиму групову діяльність операторів.

Цільова функція задачі оптимального закріплення операторів кожної m -ї групи з обмеженням на час виконання функції має вигляд:

$$P_r^m = \sum_l \sum_{i=r+1}^N \sum_{k \in K_i} P_{il}^{(k)} x_i^{(k)} \rightarrow \max. \quad (54)$$

Врахування можливостей спільної діяльності операторів в одній групі і того факту, що кожен оператор алгоритму діяльності виконує лише один оператор з групи, визначає обмеження:

$$\sum_{k \in K_i} \delta_i^{(k)} q_{mk} = 1 \quad \text{при всіх } i. \quad (55)$$

Координати вектора закріплення функції $X^m \{x_{l1}^m, x_{l2}^m, \dots, x_{ln0}^m\}$ визначається через рішення задачі $\Omega_{18}^1 \{(54), (17), (18), (19), (21), (23), (24), (55)\}$ за формулою (20). Індекс m в позначення цільової функції та вектора закріплення означає, що оптимальне рішення визначається для m -ї групи операторів.

Результатом розв'язання оптимізаційної задачі є вектор закріплення $X \{x_1, x_2, \dots, x_{n0}\}$, що забезпечує максимум цільової функції серед всіх можливих груп сумісних операторів:

$$X = X^{m_0}, \text{ якщо } P_r^{m_0} = \max_m (P_r^m). \quad (56)$$

Задача Ω_{19}^1 – оптимізація вибору операторів при урахуванні сумісності роботи операторів та наявності залежних операцій. Це завдання відрізняється



від попередньої задачі Ω_{18}^1 тим, що додається умова наявності залежних операцій (операції, що моделюються вершин $l, v, \dots, n$, виконуються одним і тим же оператором). Для вирішення цієї задачі необхідно до обмежень задачі Ω_{18}^1 додати ще одне обмеження, що враховує залежність операцій:

$$\delta_l^{(k)} = \delta_v^{(k)} = \dots = \delta_n^{(k)} \text{ для кожного } k \in K_i. \quad (57)$$

Задача Ω_{110}^1 - оптимізація вибору операторів з урахуванням допустимості використання операторів на часовому інтервалі. Дана задача враховує той факт, що деякі оператори не можуть бути задіяні на виконання функції, що надійшла на весь період її виконання. Для відображення допустимості використання оператора на даному часовому інтервалі введемо булеву змінну d_k ($k=1, 2, \dots, K_0$): $d_k = 1$, якщо k -й оператор може бути задіяний на виконання функції, що надійшла, і $d_k = 0$ в іншому випадку. Тоді задача оптимального закріплення операторів за умови, що не всі оператори можуть бути задіяні на виконання функції, що надійшла, і при обмеженні на середній час виконання алгоритму діяльності відрізняється від задачі Ω_{12}^1 тим, що

обмеження (21) замінюється обмеженням
$$\sum_{i=r+1}^N \sum_j \sum_{k \in K_i} P_{ij}^{(k)} T_{ij}^{(k)} x_i^{(k)} \leq T_0, \text{ а}$$
 обмеження (22) – обмеженням вигляду:

$$\sum_{k \in K_i} \delta_i^{(k)} d_k = 1 \text{ для кожного } i. \quad (58)$$

Обмеження (58) враховує умову допустимості використання оператора для виконання функції на даному часовому інтервалі і той факт, що кожен алгоритм діяльності виконує тільки один оператор. Координати вектора закріплення функції $X\{x_1, x_2, \dots, x_{n0}\}$ визначається через рішення задачі Ω_{110}^1 {(16)-(19),(21),(58),(23),(24)} за формулою (20).



5.3. Вибір оптимального варіанту для алгоритмів функціонування послідовного типу на графі робіт

Розробимо спосіб вирішення поставленої вище задачі оптимізації (1)-(5) за умови, що алгоритм діяльності оператора при виконанні заявки, що надійшла, зводиться до алгоритму послідовного типу, тобто. може бути представлений послідовним виконанням окремих операцій або більших функціональних елементів.

Введемо такі позначення. Позначимо через K множина усіх операторів СОІУ. Нехай АФ, що реалізує функцію, яка надійшла, складається з n_0 операцій, які моделюються ТФО. Кожну n -у операцію можуть виконувати K_n операторів, $K_n \in K$. У кожного оператора $k \in K_n$ може бути S_n^k способів виконання n -ї операції. Для кожного k -го оператора відомі ймовірність безпомилкового виконання n -ї операції $B_n^{(k)}$ і випадкова величина $T_n^{(k)}$ часу виконання. Максимальна кількість операторів, що виконують n -у операцію – K . Введемо булеву змінну $x_n^{(k)}$. Ця змінна необхідна для фіксації способу виконання операції: $x_n^{(k)}=1$, якщо для n -ої операції вибрати для виконання k -го оператора, $x_n^{(k)}=0$, в протилежному випадку. Операції алгоритму діяльності вважатимемо залежними, якщо ці операції виконує один і той самий оператор. Для відображення залежності між операціями введемо ще одну булеву змінну a_{ln} ($l=1,2,\dots,n_0$; $n=1,2,\dots,n_0$): $a_{ln} = 1$, якщо операції l та n повинні виконуватися одним оператором, і $a_{ln} = 0$, якщо $l=n$ або немає зв'язку між вибором операторів виконання операцій.

Аналогічно попередньому параграфу розробимо оптимізаційні моделі розв'язання задач, наведених у табл.5.5. У всіх задачах цільовою функцією буде ймовірність безпомилкового виконання алгоритму функціонування, який реалізує функцію, що надійшла.

Задача Ω_{11}^2 – оптимізація вибору операторів без обмеження на час виконання операцій. Результатами оптимізації є:



$$F(X) = \prod_{n=1}^{n_0} \sum_{k \in K_n} B_n^{(k)} x_n^{(k)}$$

1. Значення цільової функції

2. Значення змінних $x_n^{(k)}$, $n=1,2,\dots,n_0$, $k \in K_n$. При цьому для кожної n -ї

ТФО існує лише одне ненульове значення змінної $x_n^{(k)}$. Це означає, що кожна операція алгоритму діяльності виконується одним оператором.

Координати вектора закріплення $X\{X_1, X_2, \dots, X_{n_0}\}$ визначаються через значення змінних $x_n^{(k)}$ в такий спосіб:

1. Розмірність вектора X закріплення функції, що надійшла, дорівнює кількості операцій алгоритму функціонування, який реалізує функцію, що надійшла, n_0 .

2. Значення кожної координати – це номер (позначення) оператора, який виконує операцію алгоритму діяльності, номер якої збігається з номером координати вектора закріплення:

$$X_i = k, \text{ если } x_i^{(k)} > 0; i=1,2,\dots, n_0. \quad (59)$$

Таким чином, задача оптимізації без обмежень на час виконання, без залежних операцій алгоритму діяльності та за умови, що всі оператори можуть бути задіяні на виконання заявки, що надійшла, має вигляд:

$$F(X) = \prod_{n=1}^{n_0} \sum_{k \in K_n} B_n^{(k)} x_n^{(k)} \rightarrow \max \quad (60)$$

$$\sum_{k \in K_n} x_n^{(k)} = 1, n = 1, \dots, n_0 \quad (61)$$

$$x_n^{(k)} \in \{0,1\}, n = 1, \dots, n_0; k \in K_n. \quad (62)$$

Обмеження (61) вимагає, щоб кожна операцію алгоритму діяльності виконував лише один оператор. Обмеження (62) означає, що змінна $x_n^{(k)}$ набуває значення тільки 1 або 0.

Задача Ω_{12}^2 – оптимізація вибору операторів з урахуванням зайнятості операторів. Тут необхідно врахувати зайнятість оператора, а також можливість



використання оператора внаслідок аналізу умов праці на робочому місці. Середній час виконання алгоритму діяльності визначається за такою формулою:

$$T(X) = \sum_{n=1}^{n_0} \sum_{k \in K_n} T_n^{(k)} x_n^{(k)} \quad (63)$$

Тоді задача оптимізації з урахуванням зайнятості операторів може бути отримана з попередньої задачі Ω_{11}^2 додаванням обмеження часу, яке враховує зайнятість операторів системи:

$$\sum_{n=1}^{n_0} T_n^{(k)} x_n^{(k)} \leq T_0 - z_2^{(k)} + z_1^{(k)} \quad \text{для кожного } k \in K_n. \quad (64)$$

Координати вектора $X\{X_1, X_2, \dots, X_{n_0}\}$ закріплення функції, що надійшла, визначаються за формулою (59).

Якщо в задачі $\Omega_{12}^2 \{(60), (61), (62), (64)\}$ обмеження (64) змінити на

обмеження вигляду: $\sum_{n=1}^{n_0} \sum_{k \in K_n} T_n^{(k)} x_n^{(k)} \leq T_0$, тоді отримаємо задачу оптимізації вибору оператора з урахуванням обмеження середнього часу виконання алгоритму діяльності.

Задача Ω_{13}^2 – оптимізація вибору операторів та способів виконання операцій. Ця задача відрізняється від задачі Ω_{11}^2 тим, що кожному n -у операцію кожний k -й ($k \in K_n$) оператор може виконувати S_n^k способами. Додаємо в позначеннях змінних індекс s , що означає спосіб виконання роботи:

$B_{ns}^{(k)}$ – ймовірність безпомилкового виконання n -ї операції k -м оператором, способом $s \in S_n^k$;

$T_{ns}^{(k)}$ – середній час виконання n -ї операції k -м оператором і способом s ;

$x_{ns}^{(k)}$ – булева змінна: $x_{ns}^{(k)} = 1$ в тому випадку, якщо n -у операцію виконує

k -й оператор, $k \in K_i$, і цей оператор виконує роботу s -м способом, $s \in S_i^k$.



Тоді задача оптимізації вибору варіанта призначення операторів на етапи технологічного процесу з урахуванням способів виконання операцій має вигляд:

$$F(X) = \prod_{n=1}^{n_0} \sum_{k \in K_n} \sum_{s \in S_n^k} B_{ns}^{(k)} x_{ns}^{(k)} \rightarrow \max ; \quad (65)$$

$$\sum_{k \in K_n} \sum_{s \in S_n^k} x_{ns}^{(k)} = 1, n = 1, \dots, n_0 ; \quad (66)$$

$$x_{ns}^{(k)} \in \{0,1\}, n = 1, \dots, n_0; k \in K_n; s \in S_n^k. \quad (67)$$

Обмеження (66) означає, що кожен алгоритм діяльності виконує один оператор одним способом. Оскільки в цій задачі оптимальний варіант закріплення функції за операторами повинен відображати для кожної операції алгоритму діяльності не тільки призначеного оператора, а й спосіб виконання оператором цієї операції, замість вектора закріплення $X\{X_1, X_2, \dots, X_{n_0}\}$ введемо поняття матриці закріплення функції за операторами системи:

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \\ \dots & \dots \\ y_{n_0 1} & y_{n_0 2} \end{bmatrix}. \quad (68)$$

Елементи матриці $Y=[y_{ij}]$, що характеризують варіант закріплення функції, що надійшла за операторами, визначаються через значення змінних $x_{ns}^{(k)}$ в такий спосіб:

1. Розмірність матриці – $n_0 \times 2$. n_0 – кількість операцій АФ, що реалізує функцію, яка надійшла. Номер рядка матриці означає номер операції алгоритму функціонування. Значення елементів першого стовпця матриці характеризують вибір оператора на кожен алгоритм:

$$y_{i1}=k, \text{ якщо } x_{is}^{(k)} > 0; i = 1, 2, \dots, n_0. \quad (69)$$

2. Значення елементів другого стовпця матриці позначають спосіб виконання операції алгоритму оператором, позначеним відповідним елементом першого стовпця матриці.



$$y_{i2}=S, \text{ якщо } x_{is}^{(k)} > 0; i = 1, 2, \dots, n_0. \quad (70)$$

Задача Ω_{14}^2 – оптимізація вибору операторів та способів виконання операцій з урахуванням зайнятості операторів. Тут необхідно врахувати зайнятість операторів і те, що кожна операція алгоритму функціонування може виконуватися кожним оператором декількома способами. Попередня задача $\Omega_{13}^2 \{(65),(66),(67)\}$ оптимізує лише вибір операторів та способів виконання операторами операцій алгоритму діяльності. Доповнивши систему обмежень цієї задачі обмеженням на середній час виконання, що враховує зайнятість операторів (аналогічно до обмеження (64) задачі $\Omega_{12}^2 \{(60),(61),(62),(64)\}$) отримаємо оптимізаційну модель вирішення поточної задачі:

$$\sum_{n=1}^{n_0} \sum_{s \in S_n^k} T_{ns}^{(k)} x_{ns}^{(k)} \leq T_0 - z_2^{(k)} + z_1^{(k)} \quad \text{для кожного } k \in K_n, \quad (71)$$

де величини $B_{ns}^{(k)}$, $T_{ns}^{(k)}$ та змінна $x_{ns}^{(k)}$ мають той же зміст, що і в задачі $\Omega_{13}^2 \{(65),(66),(67)\}$. Аналогічно, результат закріплення за операторами системи функції, що надійшла, відображаємо через елементи матриці закріплення $Y=[y_{ij}]$ за формулами (69) та (70).

Якщо в задачі $\Omega_{14}^2 \{(65),(66),(67),(71)\}$ обмеження (71) змінити на

обмеження вигляду: $\sum_{n=1}^{n_0} \sum_{k \in K_n} \sum_{s \in S_n^k} T_{ns}^{(k)} x_{ns}^{(k)} \leq T_0$, тоді отримаємо задачу оптимізації вибору операторів і способів виконання операцій з обмеженням на середній час виконання алгоритму діяльності.

Задача Ω_{15}^2 – оптимізація вибору операторів при наявності залежних операцій. У випадку залежних рішень введемо ще одну булеву змінну a_{ln} ($l=1, 2, \dots, n_0$; $n=1, 2, \dots, n_0$). Тут: $a_{ln} = 1$, якщо операції l та n мають виконуватися одним оператором, і $a_{ln} = 0$, якщо $l=n$, або немає зв'язку між вибором операторів виконання операцій. Тоді оптимізаційну модель розв'язання поточної задачі



отримаємо додаванням до задачі $\Omega_{11}^2 \{(5.60), (5.61), (5.62)\}$ обмеження:

$$x_l^{(k)} = x_n^{(k)} \text{ для кожного } k \in K, \text{ якщо } a_{ln} = 1; l, n \in \{1, 2, \dots, n_0\}. \quad (72)$$

Це обмеження вимагає, щоб для залежних операцій рішення збігалися. Векторні елементи закріплення $X\{X_1, X_2, \dots, X_{n_0}\}$ визначаються через отримані значення змінних $x_n^{(k)}$ за формулою (68).

Задача $\Omega_{15}^{2'}$ - оптимізація вибору операторів за наявності залежних операцій з урахуванням обмеження на середній час виконання. Ця задача відрізняється від попередньої задачі $\Omega_{15}^2 \{(60), (61), (62), (72)\}$ тим, що додається обмеження на час виконання алгоритму діяльності:

$$\sum_{n=1}^{n_0} \sum_{k \in K_n} T_n^{(k)} x_n^{(k)} \leq T_0. \quad (73)$$

Задача Ω_{18}^2 – вибір операторів при врахуванні сумісності роботи операторів з обмеженням на час виконання функції. Дана задача враховує той факт, що не всі оператори СОІУ можуть бути задіяні спільно на виконання операцій алгоритму функціонування, який реалізує функцію, що надійшла. Аналогічно задачі Ω_{18}^1 , для відображення спільної роботи операторів системи попарно, введемо матрицю сумісності $[C_{nl}]$ (формули (39) та (40)) і сформуємо матрицю $[Q_{mj}]$ (формули (51) та (52)), кожний рядок якої моделює одну із груп операторів, які можуть бути задіяні на виконання алгоритму функціонування спільно. Тоді завдання оптимального закріплення операторів кожної m -ї групи з обмеженням на час виконання функції має вигляд:

$$F(X^m) = \prod_{n=1}^{n_0} \sum_{k \in K_n} B_n^{(k)} x_n^{(k)} \rightarrow \max; \quad (74)$$

$$\sum_{k \in K_n} x_n^{(k)} = 1, n = 1, \dots, n_0; \quad (75)$$



$$\sum_{k \in K_n} x_n^{(k)} q_{mk} = 1, n = 1, \dots, n_0; \quad (76)$$

$$\sum_{n=1}^{n_0} \sum_{k \in K_n} T_n^{(k)} x_n^{(k)} \leq T_0 \quad (77)$$

Обмеження (76) враховує можливість спільної діяльності операторів в одній групі й той факт, що кожен оператор алгоритму діяльності виконує лише один оператор групи.

Індекс m вектора закріплення $X^m \{X^m_1, X^m_2, \dots, X^m_{n_0}\}$ в (74) означає, що оптимальне рішення визначається m -ї групи операторів, спільна діяльність яких допустима. Елементи вектора закріплення визначаються через отримані значення змінних $x_n^{(k)}$ за формулою (59).

Результатом вирішення оптимізаційної задачі є вектор закріплення, що забезпечує максимум цільової функції серед усіх можливих груп сумісних операторів:

$$F(X) = \max_m (F(X^m)). \quad (78)$$

5.4. Вибір оптимального варіанта закріплення функцій за операторами при необхідності урахування помилок різних типів

В загальному вигляді задача закріплення функцій за операторами з урахуванням помилок різних типів може бути сформульована на підставі задачі (6)–(10), наведеної в п.1. Вказується той факт, що реалізація функції може бути з порушеннями різних типів. Кожне порушення може призвести до різних значень збитків. Можливе чисельне вираження збитків по кожному з несприятливих результатів. Необхідно вибрати варіант призначення операторів на етапи технологічного процесу, що забезпечує мінімум збитків від можливих порушень при обмеженні на середній час виконання алгоритму. Складемо вираз



для цільової функції. Введемо позначення:

E – множина різних типів помилок, які можуть бути внесені операторами при виконанні АФ, що реалізує заявку, яка надійшла;

$e_1, e_2, \dots, e_j, \dots$ – елементи множини E ;

E_0 – кількість різних типів помилок;

L – множина різних сполучень без повторень по j елементів ($j=1, 2, \dots, E_0$) з елементів множини E . Усі можливі сполучення, що моделюють одночасну наявність j всіх можливих різних помилок, визначаємо як коефіцієнти виробляючої функції при s^j , аналогічно формулі (43):

$$F_{**}(s) = \sum_{j=0}^{E_0} \beta_j s^j = (1 + e_1 s)(1 + e_2 s) \dots (1 + e_{E_0} s), \quad (79)$$

де s – будь-яке дійсне число.

Наприклад, для множини E , що складається із 3-х різних помилок e_1, e_2, e_3 , існує 3-и результати виконання алгоритму функціонування з одною помилкою (e_1, e_2, e_3), 3-и різних результати з двома помилками ($e_1 e_2, e_1 e_3, e_2 e_3$), і один результат з трьома помилками ($e_1 e_2 e_3$).

В загальному вигляді елемент множини $l \in L$ (тобто сполучення елементів множини E по j елементів) подається наступним чином:

$$l = e_{h_1} e_{h_2} \dots e_{h_j}, \quad (80)$$

де: $h_1 = 1, 2, 3, \dots, E_0$; $h_2 = 2, 3, 4, \dots, E_0$; $h_j = j, j+1, j+2, \dots, E_0$; $j=1, 2, \dots, E_0$.

Кількість всіх елементів множини L визначається за формулою:

$$L_0 = \sum_{j=1}^{E_0} \frac{E_0!}{(E_0 - j)! j!}. \quad (81)$$

Нехай:

$B_l^0(X)$ – ймовірність виконання АФ з помилками, визначеними сполученням $l \in L$ (5.80);

α_l – величина збитків від реалізації функції з порушеннями, визначеними сполученням $l \in L$ (80).

Тоді формула для вираження цільової функції, що визначає величину збитку



в результаті внесення помилок різних типів, матиме вигляд:

$$U = \sum_{l \in L} \alpha_l B_l^0(X) \quad (82)$$

Припустимо, наприклад, що маємо ситуацію з трьома можливими порушеннями (e_1, e_2, e_3) при реалізації функції, що надійшла на виконання. Тоді вираз для цільової функції (82) набуде вигляду:

$$U = \alpha_{e_1} B_{e_1}^0(X) + \alpha_{e_2} B_{e_2}^0(X) + \alpha_{e_3} B_{e_3}^0(X) + \alpha_{e_1 e_2} B_{e_1 e_2}^0(X) + \alpha_{e_1 e_3} B_{e_1 e_3}^0(X) + \alpha_{e_2 e_3} B_{e_2 e_3}^0(X) + \alpha_{e_1 e_2 e_3} B_{e_1 e_2 e_3}^0(X)$$

Вираз для $B_l^0(X)$ у формулі (82) залежить від способу опису АФ графом подій чи графом робіт.

Складемо оптимізаційні моделі для вирішення задач $\Omega_{21}^1, \Omega_{21}^2, \Omega_{22}^1, \Omega_{22}^2, \Omega_{23}^1, \Omega_{23}^2, \Omega_{24}^1, \Omega_{24}^2, \Omega_{25}^1, \Omega_{25}^2, \Omega_{26}^1, \Omega_{26}^2, \Omega_{27}^1, \Omega_{27}^2, \Omega_{28}^1, \Omega_{28}^2, \Omega_{29}^1, \Omega_{29}^2, \Omega_{210}^1, \Omega_{210}^2$, наведених в табл.2.

Як у разі опису АФ графом подій, так і у разі опису АФ графом робіт, зазначені моделі відрізняються відповідно від оптимізаційних моделей для вирішення задач $\Omega_{11}^1, \Omega_{11}^2, \Omega_{12}^1, \Omega_{12}^2, \Omega_{13}^1, \Omega_{13}^2, \Omega_{14}^1, \Omega_{14}^2, \Omega_{15}^1, \Omega_{15}^2, \Omega_{16}^1, \Omega_{16}^2, \Omega_{17}^1, \Omega_{17}^2, \Omega_{18}^1, \Omega_{18}^2, \Omega_{19}^1, \Omega_{19}^2, \Omega_{110}^1, \Omega_{110}^2$ тільки виразом для цільової функції та типом екстремуму.

При описі алгоритму функціонування графом подій вираз цільової функції оптимізаційних задач $\Omega_{21}^1, \Omega_{21}^2, \Omega_{22}^1, \Omega_{22}^2, \Omega_{25}^1, \Omega_{25}^2, \Omega_{26}^1, \Omega_{26}^2, \Omega_{27}^1, \Omega_{27}^2, \Omega_{28}^1, \Omega_{28}^2, \Omega_{29}^1, \Omega_{29}^2, \Omega_{210}^1, \Omega_{210}^2$ буде мати вигляд:

$$U = \sum_{l \in L} \alpha_l \sum_l \sum_{i=r+1}^N \sum_{k \in K_i} P_{il}^{(k)} x_i^{(k)} \quad (83)$$

Цільова функція для оптимізаційних задач $\Omega_{23}^1, \Omega_{23}^2, \Omega_{24}^1, \Omega_{24}^2$ з урахуванням різних способів виконання операторами операцій АФ матиме вигляд:



$$U = \sum_{l \in L} \alpha_l \sum_l \sum_{i=r+1}^N \sum_{k \in K_i} \sum_{s \in S_i} P_{ils}^{(k)} x_{is}^{(k)} \quad (84)$$

Обмеження та змінні в оптимізаційних моделях для вирішення задач Ω_{21}^1 , Ω_{21}^2 , Ω_{22}^1 , Ω_{22}^2 , Ω_{23}^1 , Ω_{23}^2 , Ω_{24}^1 , Ω_{24}^2 , Ω_{25}^1 , Ω_{25}^2 , Ω_{26}^1 , Ω_{26}^2 , Ω_{27}^1 , Ω_{27}^2 , Ω_{28}^1 , Ω_{28}^2 , Ω_{29}^1 , Ω_{29}^2 , Ω_{210}^1 , Ω_{210}^2 співпадають відповідно з обмеженнями та змінними для розв'язання задач Ω_{11}^1 , Ω_{11}^2 , Ω_{12}^1 , Ω_{12}^2 , Ω_{13}^1 , Ω_{13}^2 , Ω_{14}^1 , Ω_{14}^2 , Ω_{15}^1 , Ω_{15}^2 , Ω_{16}^1 , Ω_{16}^2 , Ω_{17}^1 , Ω_{17}^2 , Ω_{18}^1 , Ω_{18}^2 , Ω_{19}^1 , Ω_{19}^2 .

5.5. Приклад реалізації моделей

Розглянемо спрощену демонстраційну задачу оптимального розподілу функцій між операторами-виконавцями фірми, що надає своїм клієнтам послуги пов'язані з обслуговуванням інформаційних систем. Нехай на фірму надходять заявки на відновлення бази даних системи бухгалтерського обліку об'єднаної територіальної громади (заявка типу f_1) та відновлення працездатності касового апарату у роздрібній точці селищ громади (заявка типу f_2). Пріоритет заявок – термінові. Час виконання для першої заявки не більше 3,5 годин, для другої заявки – не більше 2,5 годин. Заявки можуть виконувати шість операторів-виконавців.

Необхідно забезпечити мінімум збитків, які можуть бути завдані внаслідок помилкового виконання алгоритмів функціонування, що реалізують обидві заявки. Обмеження на часові параметри процесу виконання пояснюється тим, що невчасна реалізація алгоритму діяльності операторів тягне за собою збитки від зриву графіка подання звітних документів замовником до контролюючих структур для першої заявки та збитки від припинення торгівлі для другої заявки.

Склад операцій АФ реалізації заявок, що надходять показаний в табл. 3.



Таблиця 3 - Склад операцій алгоритмів функціонування, що реалізують заявки типу f_1 та f_2

№п/п	Назва	Позначення	Названа типової функціональної одиниці
<i>Операції алгоритму діяльності виконання заявки типу f_1</i>			
1	Підключення до хмарного сховища даних	P ₁	Робоча
2	Завантаження резервної копії бази даних бухгалтерського обліку замовника	P ₂	Робоча
3	Розархівування та встановлення резервної копії	P ₃	Робоча
4	Контроль правильності функціонування системи	K ₁	Контроль функціонування
<i>Операції алгоритму діяльності виконання заявки типу f_2</i>			
1	Формування та обробка запиту на визначення параметрів системи управління касовим апаратом	P ₁	Робоча
2	Перевантаження модему та касового апарату, виконання ремонтних робіт	P ₂	Робоча
3	Налаштування програмного забезпечення системи керування касовим апаратом	P ₃	Робоча

Модель процесу відновлення резервної бази даних системи бухгалтерського обліку у вигляді графа робіт та графа подій показано на рис.3 модель процесу відновлення працездатності касового апарату - на рис. 4. Позначення – згідно [12,17]. У демонстраційних цілях показаний один із можливих способів виконання заявок, у разі наявності контрольних операцій правильності реалізації операцій алгоритму, структура реалізації заявки f_2 буде з однією або декількома зворотними переходами. Вихідні дані щодо якості виконання робочих операцій алгоритмів діяльності для реалізації заявок f_1 та f_2 наведено в табл. 4. Вихідні дані щодо якості виконання контрольної операції алгоритму діяльності, що реалізує заявку f_1 , наведені в табл.5. Тут B^I – ймовірність безпомилкового виконання робочої операції, K^{II} – ймовірність



визнання робочої операції виконаної правильно при фактично правильному виконанні, K^{00} – ймовірність визнання робочої операції виконаної неправильно при фактично неправильному виконанні, M та D – математичне очікування та дисперсія часу виконання операції. Величина збитків при помилковому виконанні заявки f^1 становить 97,9 грн., заявки f^2 – 122,6 грн. Величина збитку за одиницю часу очікування на виконання заявки f^1 становить 18 грн., заявки f^2 – 26,4 грн.

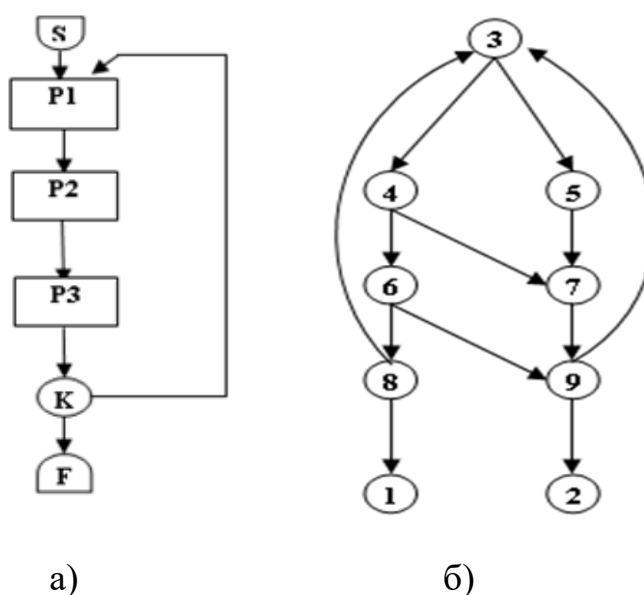


Рисунок 3 - Модель процесу відновлення резервної бази даних системи бухгалтерського обліку: а) – граф робіт; б) – граф подій.

Таблиця 4 - Вихідні дані щодо якості виконання робочих операцій алгоритмів діяльності для реалізації заявок f_1 и f_2

Оператор	Характеристики щодо якості		Операції					
			Заявка f_1			Заявка f_2		
			P_1	P_2	P_3	P_1	P_2	P_3
1	Безпомилковість	B^1	0,97	0,981	0,975	0,97	0,98	0,96
	Час	$M, год$	0,25	0,8	1,45	0,3	1,8	0,7
		$D, год^2$	0,10	0,32	0,21	0,25	0,20	0,14
2	Безпомилковість	B^1	0,99	0,988	0,985	0,99	0,979	0,988
	Час	$M, год$	0,1	0,5	1,1	0,35	1,45	0,6
		$D, год^2$	0,09	0,35	0,22	0,28	0,25	0,15
3	Безпомилковість	B^1	0,998	0,973	0,989	0,98	0,99	0,981
	Час	$M, год$	0,25	0,8	1,3	0,2	1,2	0,5
		$D, год^2$	0,08	0,34	0,22	0,29	0,23	0,25



Оператор	Характеристики щодо якості		Операції					
			Заявка f_1			Заявка f_2		
			P_1	P_2	P_3	P_1	P_2	P_3
4	Безпомилковість	B^I	0,974	0,979	0,98	0,969	0,981	0,966
	Час	$M, год$	0,5	0,9	1,2	0,34	1,3	0,65
		$D, год^2$	0,08	0,27	0,32	0,26	0,22	0,26
5	Безпомилковість	B^I	0,999	0,971	0,99	0,991	0,987	0,962
	Час	$M, год$	0,4	0,5	1,5	0,32	1,44	0,65
		$D, год^2$	0,08	0,34	0,21	0,27	0,25	0,26
6	Безпомилковість	B^I	0,981	0,984	0,91	0,955	0,992	0,962
	Час	$M, год$	0,35	0,8	2,4	0,45	1,2	0,85
		$D, год^2$	0,08	0,29	0,20	0,29	0,23	0,25

Таблиця 5 - Вихідні дані щодо якості виконання контрольної операції алгоритму діяльності, що реалізує заявку f_1

Оператор	Характеристики виконання операції контролю			
	Якість контролю		Час	
	K^{II}	K^{00}	$M, год$	$D, год^2$
1-й оператор	0,99	0,968	0,7	0,25
2-й оператор	0,98	0,91	1	0,21
3-й оператор	0,975	0,952	0,9	0,28
4-й оператор	0,963	0,92	0,6	0,26
5-й оператор	0,969	0,96	1,2	0,24
6-й оператор	0,979	0,986	1,3	0,32

Дані в табл. 4, 5 є, як правило, є результатом обробки інформації, що міститься в статистичних базах даних фірми, що надає послуги пов'язані з обслуговуванням інформаційних систем клієнтів.

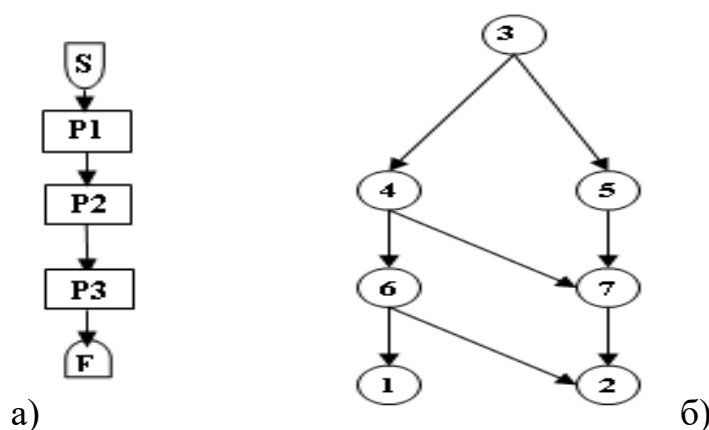


Рисунок 4 - Модель процесу відновлення працездатності касового апарату:
а) – граф робіт; б) – граф подій.



Оскільки при закріпленні заявок за операторами-виконавцями типу f_1 та f_2 , що надходять, необхідно врахувати умову обмеження щодо часу виконання алгоритмів і той факт, що кожен алгоритм виконується тільки одним оператором, задача оптимізації представляємо моделлю $\Omega_{12}^1 \{(16)–(19), (21^1)–(24)\}$. Цільова функція – мінімум збитків, які можуть бути завдані внаслідок помилкового виконання алгоритмів функціонування, що реалізують обидві заявки. Для вирішення задачі вибираємо засіб «Пошук рішення» MS Excel. Вихідні дані для вирішення задачі у вигляді перехідних ймовірностей виконання операцій алгоритмів діяльності, що реалізують заявки типу f_1 та f_2 , наведено на рис. 5 та рис. 6, відповідно. В загальному вигляді величину збитків, які можуть бути завдані внаслідок помилкового виконання алгоритмів функціонування, що реалізують всі можливі заявки (позначимо через символ Z), визначаємо за такою формулою:

$$F(X) = \sum_{z=1}^Z ((1 - P_1^z) \cdot U^z + T^z \cdot u^z),$$

де P_1^z , - ймовірність безпомилкового виконання z -ї заявки, T^z - середній час процесу до поглинання для графі подій, що відповідає z -й заявці, визначаються за формулами (14) та (15), відповідно; U^z – відома величина збитку при помилковому виконанні z -ї заявки; u^z – величина збитку, який несе фірма за одиницю часу, що передуює завершенню виконання z -го алгоритму.

Опис змінних оптимізаційної моделі для виконання алгоритму діяльності, що реалізує заявку типу f_1 , та значення цих змінних, отримані в результаті розв'язання задачі, показані на рис.7.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
5	Матриці перехідних ймовірностей виконання операцій алгоритму 1																				
6																					
7	Перший оператор $P_{ij} =$	1	0	0	0	0	0	0	0	0			1	0	0	0	0	0	0	0	0
8		0	1	0	0	0	0	0	0	0			0	1	0	0	0	0	0	0	0
9		0	0	0	0,97	0,03	0	0	0	0			0	0	0,99	0,01	0	0	0	0	0
10		0	0	0	0	0	0,981	0,019	0	0			0	0	0	0,988	0,012	0	0	0	0
11		0	0	0	0	0	0	0	1	0			0	0	0	0	0	1	0	0	0
12		0	0	0	0	0	0	0	0,975	0,025			0	0	0	0	0	0,985	0,015		
13		0	0	0	0	0	0	0	0	1			0	0	0	0	0	0	0	1	
14		0,99	0	0,01	0	0	0	0	0	0			0,98	0	0,02	0	0	0	0	0	0
15		0	0,032	0,968	0	0	0	0	0	0			0	0,09	0,91	0	0	0	0	0	0
16																					
17	Третій оператор $P_{ij} =$	1	0	0	0	0	0	0	0	0			1	0	0	0	0	0	0	0	0
18		0	1	0	0	0	0	0	0	0			0	1	0	0	0	0	0	0	0
19		0	0	0	0,998	0,002	0	0	0	0			0	0	0,974	0,026	0	0	0	0	0
20		0	0	0	0	0	0,973	0,027	0	0			0	0	0	0,979	0,021	0	0	0	0
21		0	0	0	0	0	0	0	1	0			0	0	0	0	1	0	0	0	0
22		0	0	0	0	0	0	0	0,989	0,011			0	0	0	0	0	0,98	0,02		
23		0	0	0	0	0	0	0	0	1			0	0	0	0	0	0	0	1	
24		0,975	0	0,025	0	0	0	0	0	0			0,963	0	0,037	0	0	0	0	0	0
25		0	0,048	0,952	0	0	0	0	0	0			0	0,08	0,92	0	0	0	0	0	0
26																					
27																					
28	П'ятий оператор $P_{ij} =$	1	0	0	0	0	0	0	0	0			1	0	0	0	0	0	0	0	0
29		0	1	0	0	0	0	0	0	0			0	1	0	0	0	0	0	0	0
30		0	0	0	0,999	0,001	0	0	0	0			0	0	0,981	0,019	0	0	0	0	0
31		0	0	0	0	0	0,971	0,029	0	0			0	0	0	0,984	0,016	0	0	0	0
32		0	0	0	0	0	0	1	0	0			0	0	0	0	1	0	0	0	0
33		0	0	0	0	0	0	0	0,99	0,01			0	0	0	0	0	0,91	0,09		
34		0	0	0	0	0	0	0	0	1			0	0	0	0	0	0	0	1	
35		0,969	0	0,031	0	0	0	0	0	0			0,979	0	0,021	0	0	0	0	0	0
36		0	0,04	0,96	0	0	0	0	0	0			0	0,014	0,986	0	0	0	0	0	0

Рисунок 5 - Матриці перехідних ймовірностей виконання операцій алгоритму діяльності, що реалізує заявку типу f_1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
38	Матриці перехідних ймовірностей виконання операцій алгоритму 2																
39																	
40																	
41	Перший оператор $P_{ij} =$	1	0	0	0	0	0	0			1	0	0	0	0	0	0
42		0	1	0	0	0	0	0			0	1	0	0	0	0	0
43		0	0	0	0,97	0,03	0	0			0	0	0,99	0,01	0	0	0
44		0	0	0	0	0	0,98	0,02			0	0	0	0	0,979	0,021	0
45		0	0	0	0	0	0	1			0	0	0	0	0	0	1
46		0,96	0,04	0	0	0	0	0			0,988	0,012	0	0	0	0	0
47		0	1	0	0	0	0	0			0	1	0	0	0	0	0
48																	
49																	
50	Третій оператор $P_{ij} =$	1	0	0	0	0	0	0			1	0	0	0	0	0	0
51		0	1	0	0	0	0	0			0	1	0	0	0	0	0
52		0	0	0	0,98	0,02	0	0			0	0	0,969	0,031	0	0	0
53		0	0	0	0	0	0,99	0,01			0	0	0	0	0,981	0,019	0
54		0	0	0	0	0	0	1			0	0	0	0	0	0	1
55		0,981	0,019	0	0	0	0	0			0,966	0,034	0	0	0	0	0
56		0	1	0	0	0	0	0			0	1	0	0	0	0	0
57																	
58																	
59	П'ятий оператор $P_{ij} =$	1	0	0	0	0	0	0			1	0	0	0	0	0	0
60		0	1	0	0	0	0	0			0	1	0	0	0	0	0
61		0	0	0	0,991	0,009	0	0			0	0	0,955	0,045	0	0	0
62		0	0	0	0	0	0,987	0,013			0	0	0	0	0,992	0,008	0
63		0	0	0	0	0	0	1			0	0	0	0	0	0	1
64		0,962	0,038	0	0	0	0	0			0,962	0,038	0	0	0	0	0
65		0	1	0	0	0	0	0			0	1	0	0	0	0	0

Рисунок 6 - Матриці перехідних ймовірностей виконання операцій алгоритму діяльності, що реалізує заявку типу f_2



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
71										
72	Змінні для алгоритму 1									
73	Назва змінної	X_{31}^1	X_{31}^2	X_{31}^3	X_{31}^4	X_{31}^5	X_{31}^6	X_{41}^1	X_{41}^2	X_{41}^3
74	Значення	0,0000	1,0682	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0765	0,0000
75	Нижнє обмеження	0	0	0	0	0	0	0	0	0
76										
77	Назва змінної	X_{41}^4	X_{41}^5	X_{41}^6	X_{51}^1	X_{51}^2	X_{51}^3	X_{51}^4	X_{51}^5	X_{51}^6
78	Значення	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0090	0,0000	0,0007	0,0000	0,0000
79										
80	Назва змінної	X_{61}^1	X_{61}^2	X_{61}^3	X_{61}^4	X_{61}^5	X_{61}^6	X_{71}^1	X_{71}^2	X_{71}^3
81	Значення	0,00000	1,05010	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,04708	0,00000
82										
83	Назва змінної	X_{71}^4	X_{71}^5	X_{71}^6	X_{81}^1	X_{81}^2	X_{81}^3	X_{81}^4	X_{81}^5	X_{81}^6
84	Значення	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	1,05568	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
85										
86	Назва змінної	X_{91}^1	X_{91}^2	X_{91}^3	X_{91}^4	X_{91}^5	X_{91}^6			
87	Значення	0,00000	0,07151	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000			
88										
89	Цілочисленні змінні для алгоритму 1									
90	Назва змінної	δ_1^1	δ_1^2	δ_1^3	δ_1^4	δ_1^5	δ_1^6			
91	Значення	0	1	0	0	0	0			
92	Верхнє обмеження	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00			
93	Цілочисленне	Ціле	Ціле	Ціле	Ціле	Ціле	Ціле			
94		i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9		
	Ймовірність знаходження системи в початковому стані у вершині i графа подій алгоритму 1	1	0	0	0	0	0	0		
95										

Рисунок 7 - Опис змінних оптимізаційної моделі для виконання алгоритму діяльності, що реалізує заявку типу f_1

Опис змінних оптимізаційної моделі для виконання алгоритму діяльності, що реалізує заявку типу f_2 , фрагмент системи обмежень, вираз для цільової функції, значення змінних та цільової функції, отримані в результаті розв'язання задачі, наведено на рис. 8. Отриманий результат ($x_{i1}^{(2)} > 0$, $x_{i2}^{(3)} > 0$, $\delta_1^2 > 0$ и $\delta_2^3 > 0$) показує, що мінімальні збитки ($F(X)=117,99$) від помилкового виконання алгоритмів діяльності, що реалізують заявки типу f_1 та f_2 , буде отримано, якщо виконання заявки типу f_1 закріпити за другим оператором, а виконання заявки типу f_2 – за третім оператором.

Реалізація розробленої моделі оптимізації закріплення між операторами-виконавцями фірми заявок, що надходять, дозволяє значно скоротити збитки від



97	Змінні для алгоритму 2												
98	Назва змінної	X_{32}^1	X_{32}^2	X_{32}^3	X_{32}^4	X_{32}^5	X_{32}^6	X_{42}^1	X_{42}^2	X_{42}^3	X_{42}^4		
99	Значення	0,0000	0,0000	1,0651	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,7004	0,0000		
100	Нижнє обмеження	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
101													
102	Назва змінної	X_{42}^5	X_{42}^6	X_{52}^1	X_{52}^2	X_{52}^3	X_{52}^4	X_{52}^5	X_{52}^6	X_6^1	X_6^2		
103	Значення	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,1450	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		
104													
105	Назва змінної	X_6^3	X_6^4	X_6^5	X_6^6	X_7^1	X_7^2	X_7^3	X_7^4	X_7^5	X_7^6		
106	Значення	1,0077	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0923	0,0000	0,0000	0,0000		
107	Цілочисленні змінні для алгоритму 2												
108	Назва змінної	δ_2^1	δ_2^2	δ_2^3	δ_2^4	δ_2^5	δ_2^6						
109	Значення	0	0	1	0	0	0						
110	Верхнє обмеження	1	1	1	1	1	1						
111	Цілочисленне	Ціле	Ціле	Ціле	Ціле	Ціле	Ціле						
112	Ймовірність знаходження системи в початковому стані у вершині i графа подій алгоритму 2	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$	$i=7$							
113		1	0	0	0	0							
114	Цільова функція:	$U_1 \cdot (1 - (P_{81}^{(1)} \cdot X_{81}^{(1)} + P_{81}^{(2)} \cdot X_{81}^{(2)} + P_{81}^{(3)} \cdot X_{81}^{(3)} + P_{81}^{(4)} \cdot X_{81}^{(4)} + P_{81}^{(5)} \cdot X_{81}^{(5)} + P_{81}^{(6)} \cdot X_{81}^{(6)})) + u_1 \cdot T_1 + U_2 \cdot (1 - (P_{61}^{(1)} \cdot X_{62}^{(1)} + P_{61}^{(2)} \cdot X_{62}^{(2)} + P_{61}^{(3)} \cdot X_{62}^{(3)} + P_{61}^{(4)} \cdot X_{62}^{(4)} + P_{61}^{(5)} \cdot X_{62}^{(5)} + P_{61}^{(6)} \cdot X_{62}^{(6)})) + u_2 \cdot T_2$								117,99	Мінімум		
115													
116	Вигляд обмежень	Обмеження на цілочисленні змінні								Ліва частина	Знак	Права частина	
117	$\sum_{k \in K} \delta_{1,2}^{(k)} = 1$	$\delta_1^{(1)} + \delta_1^{(2)} + \delta_1^{(3)} + \delta_1^{(4)} + \delta_1^{(5)} + \delta_1^{(6)} = 1$								1,0000	=	1	
118		$\delta_2^{(1)} + \delta_2^{(2)} + \delta_2^{(3)} + \delta_2^{(4)} + \delta_2^{(5)} + \delta_2^{(6)} = 1$								1,0000	=	1	
119	Обмеження на дійсні та цілочисленні змінні алгоритму 1												
120	$x_{1i}^{(k)} - M \cdot \delta_1^{(k)} \leq 0$	$x_{31}^{(k)} - M \cdot \delta_1^{(k)} \leq 0, x_{31}^{(k)} - m \cdot \delta_1^{(k)} \geq 0$			$x_{41}^{(k)} - M \cdot \delta_1^{(k)} \leq 0, x_{41}^{(k)} - m \cdot \delta_1^{(k)} \geq 0$			$x_{51}^{(k)} - M \cdot \delta_1^{(k)} \leq 0, x_{51}^{(k)} - m \cdot \delta_1^{(k)} \geq 0$			$x_{61}^{(k)} - M \cdot \delta_1^{(k)} \leq 0, x_{61}^{(k)} - m \cdot \delta_1^{(k)} \geq 0$		
121	$x_{1i}^{(k)} - m \cdot \delta_1^{(k)} \geq 0$	0,0000	$\leq$	0	0,0000	$\leq$	0	0,0000	$\leq$	0	-0,0012	$\leq$	0
122		0,0000	$\geq$	0	0,0000	$\geq$	0	0,0000	$\geq$	0	0,0000	$\geq$	0
123		-298.9318	$\leq$	0	-298.9235	$\leq$	0	-300.0000	$\leq$	0	-0.0028	$\leq$	0

Рисунок 8 - Фрагмент системи обмежень та результат вирішення задачі оптимізації розподілу функцій між операторами у середовищі MS Excel

простою обладнання та помилок вирішення завдання розподілу функцій. Оптимальний розподіл функцій є вагомим резервом підвищення ефективності.

Висновки

Виявлені та вирішені задачі оптимізації, що виникають у практиці прийняття рішень про закріплення заявок системи обробки інформації та управління за операторами-виконавцями з урахуванням надійнісних показників діяльності. Розроблено постановки оптимізаційних задач для випадків опису діяльності людини-оператора у вигляді графа робіт та графа подій. Розглянуто випадки необхідності забезпечення максимальної безпомилковості діяльності та мінімізації збитків від помилок людини-оператора з можливістю врахування



помилки різних типів.

Завдання сформульовані та вирішені вперше та розвивають положення наукових засад оптимізації людино-машинної взаємодії, розроблені в рамках функціонально-структурної теорії ерготехнічних систем проф. А. І. Губінського.

Розвиток полягає в:

- на відміну від відомих методів оптимізації алгоритмів діяльності людини-оператора (одного) на функціональних мережах, моделі враховують поліергатичний характер та особливості різних операторів, що працюють у системі обробки інформації та управління, технологічні обмеження, зайнятість операторів, можливість спільної реалізації діяльності тощо;

- на відміну від відомих моделей оптимізації, заснованих на концепції «бінарної» помилки, поставлені та вирішені задачі мінімізації збитків з урахуванням можливості сумісної появи та усунення помилок різних типів.

3. Достовірність отриманих результатів забезпечена: коректним використанням методів математичного програмування, теорії напівмарківських процесів та функціонально-структурної теорії ерготехнічних систем.

4. Практична значущість полягає в тому, що сформовані оптимізаційні моделі дозволяють обирати оптимальний варіант закріплення заявок за виконавцями та є теоретичною основою відповідної комп'ютерної технології оптимізації для підтримки прийняття рішень оператора-керівника системи обробки інформації та управління.

Результати можуть бути використані для систем підтримки прийняття рішень операторів-керівників в автоматизованих системах обробки інформації та управління, в яких оператори-виконавці зайняті як виконанням планових заявок, так і заявок, що обробляються у випадкові моменти часу [52-57]. Шляхами розвитку результатів можуть бути поширення на проблемні ситуації розподілу функцій у випадках, коли: відомий попередній план надходжень заявок для деякого завдання часового інтервалу; можливі черги заявок до окремих операторів-виконавців.