



KAPITEL 4 / CHAPTER 4⁴ MODELING OF A HYDRAULIC DRIVE USING MATHCAD

DOI: 10.30890/2709-2313.2025-45-02-015

Вступ.

Приблизно 35% приводів сучасного промислового обладнання є гідравлічними. Якість виконання технологічних операцій залежить від динамічних процесів у гідроприводі. На динаміку приводу впливають як зовнішні так і внутрішні фактори. Моделювання динамічних процесів у гідроприводі на етапі проектування дозволяє оптимізувати конструктивні параметри та визначити максимальні навантаження. При впровадженні та модернізації гідросистем математичне моделювання дозволяє проаналізувати експлуатаційні характеристики та оцінити вплив зовнішніх факторів на стійкість динамічних процесів.

4.1 Аналіз останніх досліджень та публікацій.

Математичне моделювання дозволяє визначити динамічні властивості гідравлічних приводів при змінних навантаженнях. У статті [1] пропонується математична модель динаміки об'ємного гідроприводу, в якій описано рівняння руху гідроциліндра, рівняння неперервності для робочої рідини з урахуванням її стисливості та втрат тиску. На основі моделі виведено перехідні характеристики і частотні характеристики системи, що важливо для аналізу динамічної поведінки під навантаженням.

У дослідженні [2] побудовано Simulink-модель гідравлічної системи приводу важкої техніки, в якій параметри гідравлічної системи (насоси, двигуни, клапани) оптимізуються для адекватного відтворення реальних робочих характеристик. Робота містить математичні представлення системних компонентів та їх взаємодії, що дозволяє аналізувати вплив параметрів на

⁴Authors: Ashchepkova Natalya

Author's sheets: 0,45



ефективність та динаміку.

У статті [3] представлена математична модель динаміки гідравлічного приводу екскаватора, яка дозволяє оцінювати динамічне навантаження та стабільність механізму приводу під різними параметрами трансмісії. В роботі представлені результати аналізу стабільності та надійності динамічної системи гідроприводу при змінних зовнішніх впливах і параметрах приводу.

В статті [4] було розроблено математичну модель адаптивної гідравлічної системи. Провідним технічним рішенням стало впровадження механізму автоматичного регулювання потоку робочої рідини в реальному часі відповідно до навантаження на привід, що дозволяє досягти оптимального режиму роботи системи. Під час дослідження проводилися математичні моделювання та симуляції. Внаслідок цього потужність приводу ріжучого механізму була зменшена до 5–6 кВт. Порівняно з традиційними підходами, запропонована адаптивна система демонструє кращу чутливість до змін опору середовища та швидшу реакцію на динамічні коливання в гідромеханічному колі.

Метою дослідження [5] є числове моделювання гідравлічних систем з акцентом на енергоефективність. Використовуються моделі для аналізу витрат енергії та розробки стратегій оптимізації для зменшення енергоспоживання. Показано, як параметри насосів і клапанів впливають на загальну ефективність системи.

Зворотний зв'язок тиску був ефективним методом активного демпфування та зменшення коливань у гідравлічних системах. Однак дослідження [6] виявляє проблему динамічного удару: швидке зростання швидкості та повільніша збіжність, обумовлені зовнішнім впливом сили або крутного моменту. Для розв'язання запропоновано введення зворотного зв'язку за тиском для активного демпфування. Стаття [6] містить теоретичний аналіз та ілюструється чисельною симуляцією. Розв'язки цієї проблеми аналізуються для гідравлічної системи з симетричним циліндром.

Причиною коливальних явищ у гідросистемах можуть бути динамічні процеси у трубопроводах. У статті [7] за допомогою методу Ньютона побудовано



модель гідравлічного трубопроводу з врахуванням, що обидва кінці простої прямої однострубною магістралі є абсолютно тверді опори. Аналіз результатів математичного моделювання за допомогою програмного забезпечення ANSYS Workbench дозволяє оптимізувати механічну гідравлічну трубопровідну систему.

В статті [8] досліджено динамічні процеси в системі керування гідроприводу конвеєра з паралельно встановленими гідромоторами. Застосовано математичну модель побудовану з урахуванням фізичних явищ, що відбуваються під час роботи гідросистеми за змінного навантаження. Визначено параметри системи керування, що забезпечують безупинну роботу конвеєра за рахунок вмикання і вимикання додаткового гідромотора за наявності перевантажень.

Сучасний розвиток робототехніки та автоматизації виробництва обумовлює дослідження гідравлічних приводів як складової частки систем керування маніпуляторів. В статті [9] проаналізовано точність керування для 6-DOF маніпулятора з гідравлічним приводом. Для зменшення похибки відхилення від оптимальної траєкторії впроваджено навчання-підкріплення. Проаналізовано відгук системи керування на команди до приводів кожної кінематичної пари.

Динамічні процеси в гідравлічному приводі нелінійні і обумовлені як зв'язком електричних та гідравлічних параметрів так і наявністю зон нечуттєвості та насичення в окремих ланках гідравлічної системи. У статті [10] для вивчення сильної нелінійності гідравлічної системи, побудовано високоточну динамічно-гідравлічну модель маніпулятора. Вирішуючи структурну складність традиційних алгоритмів керування рухом, вдосконалений алгоритм PID інтегровано з платформою навчання з підкріпленням Actor-Critic. Авторами запропоновано стратегію офлайн-навчання з використанням оновленої моделі, що забезпечує продуктивність системи модель-алгоритм у режимі реального часу. Експериментальна платформа маніпулятора підтвердила ефективність та перевагу алгоритму.



4.2 Актуальність роботи та завдання дослідження

Актуальність роботи обумовлена тим, що результати математичного моделювання є основою для проектування, дослідження та вдосконалення гідравлічних приводів.

Мета дослідження - розробити методику моделювання динамічних процесів у об'ємному гідроприводі із застосуванням пакету прикладних програм MathCad. Завдання дослідження - для гідравлічної системи за результатами математичного моделювання:

— визначити характеристики динаміки об'ємного гідроприводу через t с після початку руху.

— побудувати графіки зміни подачі насоса, витрат з гідроакумулятора, швидкостей і переміщень гідроциліндрів у діапазоні часу від 0 до t с.

4.3 Об'єкт дослідження

Структурна схема розглянутої гідравлічної системи наведена на рис.1.

Задано такі параметри агрегатів і трубопроводів (рис. 1).

1) насос:

- максимальний тиск нульової подачі P_{\max} ;
- тиск початку спрацьовування регулятора подачі P_p ;
- подача за значення тиску P_p складає Q_p ;
- подача за значення тиску $P_p=0$ становить Q_0 ;

2) гідроакумулятор:

- об'єм повітряної порожнини за тиску зарядки P_3 складає V_0 ;
- процес розширення газу ізотермічний;

3) гідроциліндр 3:

- робоча площа впуску S_{33} ;
- робоча площа випуску S_{35} ;

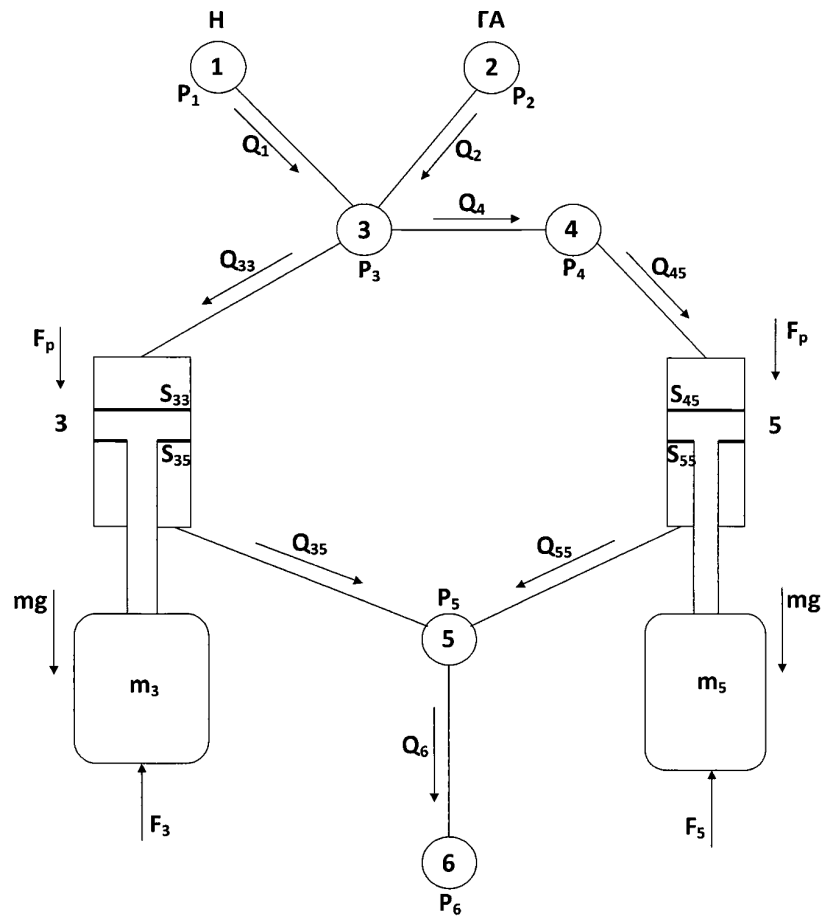


Рисунок 1 – Структурна схема гідравлічної системи.

Авторська розробка

- зведена маса до штока m_3 ;
- зведене навантаження до штока $P_3 = \text{const.}$

4) гідроциліндр 5:

- робоча площа впуску S_{45} ;
- робоча площа випуску S_{55} ;
- зведена маса до штока m_5 ;
- зведене навантаження до штока $F_5 = F_0 + kx$, де x – хід поршня;

5) гідравлічні лінії з параметрами $L_1, D_1, \zeta_1, L_2, D_2, \zeta_2, L_{33}, D_{33}, \zeta_{33}, L_{35}, D_{35}, \zeta_{35}, L_{45}, D_{45}, \zeta_{45}, L_{55}, D_{55}, \zeta_{55}$.

4.3.1 Припущення та початкові умови

Тиск у баку 6 $P_6 = \text{const.}$ У початковий момент часу тиск робочої рідини в



гідроаккумуляторі P_p . Витрати за всіма гідравлічними лініями нульові. Кінематична в'язкість $\gamma=0,22 \text{ см}^2/\text{с}$. Густина робочої рідини $\rho=850 \text{ кг/м}^3$.

Для розрахункового прикладу приймаємо наступні вихідні дані: $i=4 \text{ с}$; $P_{max}=22 \text{ МПа}$; $P_p=12 \text{ МПа}$; $Q_p=0,5 \text{ л/с}$; $Q_0=0,62 \text{ л/с}$; $S_{33}=28 \text{ см}^2$; $S_{35}=19 \text{ см}^2$; $m_3=4,8 \text{ кг}$; $F_3=4,8 \text{ кН}$; $S_{45}=7 \text{ см}^2$; $S_{55}=6 \text{ см}^2$; $m_5=2,8 \text{ кг}$; $F_0=1300 \text{ Н}$; $k=700 \text{ Н/м}$; $L_1=340 \text{ см}$; $D_1=1 \text{ см}$; $\zeta_1=15$; $L_2=6 \text{ см}$; $D_2=1 \text{ см}$; $\zeta_2=0$; $L_{33}=300 \text{ см}$; $D_{33}=0,84 \text{ см}$; $\zeta_{33}=30$; $L_{35}=600 \text{ см}$; $D_{35}=0,84 \text{ см}$; $\zeta_{35}=60$; $L_4=600 \text{ см}$; $D_4=0,6 \text{ см}$; $\zeta_4=30$; $L_{45}=650 \text{ см}$; $D_{45}=0,6 \text{ см}$; $\zeta_{45}=140$; $L_{55}=640 \text{ см}$; $D_{55}=0,6 \text{ см}$; $\zeta_{55}=0$; $L_6=1600 \text{ см}$; $D_6=1 \text{ см}$; $\zeta_5=0$; $P_6=0,3 \text{ МПа}$; $P_p=19 \text{ МПа}$.

4.4 Аналіз математичної моделі

Для виконання розрахунків скористаємося такими рівняннями.

1. Рівняння несталоного руху нестисливої рідини (по простому трубопроводу постійного перерізу) з місцевими гідравлічними втратами

$$\rho L \frac{dv}{dt} = p_{\text{вх}} - p_{\text{вих}} - \Delta p, \quad (1)$$

де ρ – густина робочої рідини; L – довжина трубопроводу; $p_{\text{вх}}$ – тиск на вході в трубопровід; $p_{\text{вих}}$ – тиск на виході з трубопроводу; Δp – сумарні гідравлічні втрати на тертя й у місцевих гідравлічних опорах:

$$\Delta p = k_{\text{мп}} Q^m + k_{\text{м}} Q^2$$

Ламінарний режим має місце за умови $Q < Q_{\text{кр}}$ та $k_{\text{мп}} = \frac{128\rho\nu L}{\pi d^4}$, $m=1$, а турбулентний – за умови $Q \geq Q_{\text{кр}}$ (гладка гідравлічна труба) з параметрами

$$k_{\text{мп}} = \frac{4^{1,75} \cdot 0,316\rho\nu^{0,25} L}{\pi^{1,75} \cdot 2gd^{4,75}}, \quad m=1, \quad Q_{\text{кр}} = \frac{2300\pi d\nu}{4}$$

Місцевий гідравлічний опір за турбулентного режиму обчислимо за

формулою $k_{\text{м}} = \frac{8\rho}{\pi^2 d^2} \zeta$. Помноживши праву і ліву частини рівняння (1) на живий



переріз трубопроводу $S_{\text{мп}} = \frac{\pi d_{\Gamma}^2}{4}$ і розділивши на ρL , одержимо таке:

$$\frac{d}{dt}(vS_{\text{мп}}) = \frac{\pi d_{\Gamma}^2}{4\rho L} p_{\text{вх}} - \frac{\pi d_{\Gamma}^2}{4\rho L} p_{\text{вих}} - \frac{\pi d_{\Gamma}^2}{4\rho L} \Delta p.$$

Узявши до уваги, що $vS_{\text{мп}} = Q$, і ввівши позначення коефіцієнта

$$k_{\text{ін}} = \frac{\pi d_{\Gamma}^2}{4\rho L},$$

який враховує інерцію рідини в трубопроводі, одержимо диференціальне рівняння динаміки рідини для трубопроводу з місцевим опором:

$$\frac{dQ}{dt} = k_{\text{ін}} p_{\text{вх}} - k_{\text{ін}} p_{\text{вих}} - k_{\text{ін}} \Delta p.$$

2. Рівняння несталого руху поршня гідроциліндра без урахування стисливості рідини в порожнинах:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{S_{\text{н}}}{m} p_{\text{н}} - \frac{S_{\text{з}}}{m} p_{\text{з}} - \frac{1}{m} F(x),$$

де v – швидкість поршня гідроциліндра; $S_{\text{н}}$, $S_{\text{з}}$ – робочі площі поршня, з'єднані відповідно з порожнинами нагнітання і зливу гідроциліндра; $p_{\text{н}}$, $p_{\text{з}}$ – тиск у порожнинах нагнітання і зливу відповідно; m – маса, зведена до штока; $F(x)$ – активна сила вздовж штока, яка є функцією від ходу штока. Рівняння ходу поршня матиме вигляд

$$\frac{dx}{dt} = v,$$

де x – хід поршня гідроциліндра.

3. Рівняння безінерційного пневмогідроаккумулятора. Рівняння стану газу в газовій порожнині запишемо таким чином:

$$p_3 V_0^n = p_A V^n,$$

де p_3 – початковий тиск у газовій порожнині або тиск зарядки; V_0 – повний початковий об'єм у газовій порожнині; p_A – поточне значення тиску в газовій порожнині, яке дорівнює тиску рідини; V – поточне значення обсягу газу; n – показник політропи.



Об'єм робочої рідини в гідроаккумуляторі становить:

$$V_{\text{ж}} = V_o - V,$$

де $V_{\text{ж}}$ – об'єм живлення; V_o – повний початковий об'єм у газовій порожнині; V – поточне значення об'єму газу.

Підставивши з рівняння стану газу значення V , одержимо таке:

$$V_{\text{ж}} = V - V_o \sqrt[n]{p_3} \frac{1}{p_A^{1/n}},$$

де $V_{\text{ж}}$ – об'єм живлення; V_o – повний початковий об'єм у газовій порожнині; p_3 – початковий тиск у газовій порожнині або тиск зарядки; p_A – поточне значення тиску у газовій порожнині, яке дорівнює тиску рідини; n – показник політропи.

Продиференціювавши за часом отриманий вираз, знайдемо рівняння витрати робочої рідини з пневмогідроаккумулятора в разі зниження тиску:

$$Q_A = \frac{dV_{\text{ж}}}{dt} - V_o \sqrt[n]{p_3} \left(-\frac{1}{n} \right) \frac{1}{p_A^{1/n}} \frac{dp_A}{dt}$$

де Q_A – поточне значення витрати робочої рідини з пневмогідроаккумулятора; $V_{\text{ж}}$ – об'єм живлення; V_o – повний початковий об'єм у газовій порожнині; p_3 – початковий тиск у газовій порожнині або тиск зарядки; p_A – поточне значення тиску в газовій порожнині, яке дорівнює тиску рідини; n – показник політропи. Звідси матимемо рівність

$$\frac{dp_A}{dt} = A_A p_A^\alpha Q_A,$$

де

$$A_A = \frac{n}{V_o \sqrt[n]{p_3}}, \quad \alpha = \frac{1}{n} + 1.$$

4. Рівняння для визначення тиску. Зведену характеристику насоса (рис. 2) наведемо у вигляді рівнянь двох похилих прямих:

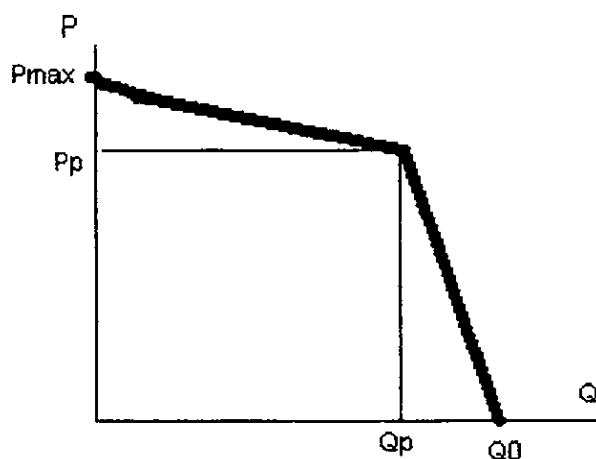


Рисунок 2 – Зведена характеристика насосу

Джерело: [11]

Рівняння для визначення тиску, створюваного об'ємним насосом і регулятором подачі запишемо таким чином:

$$p_n = A_n - k_n Q_n,$$

де A_n і k_n – постійні коефіцієнти, які визначимо для кожної ділянки характеристики за максимальним значенням тиску p_{\max} у випадку нульової подачі; p_p – тиск при подачі насоса Q_p (точка максимальної потужності насоса); Q_0 – геометрична подача насоса; Q_n – поточна подача насоса.

Підсумовуючи перелік рівнянь основних гідравлічних агрегатів, застосованих у розрахунковій частині, виділимо чотири типи рівнянь.

1. Рівняння, у яких під знаком диференціала стоїть змінна, що є параметром потоку: витрата робочої рідини чи величина, пропорційна витраті (наприклад, швидкість). Ці рівняння гідравлічних ліній і гідроциліндра без урахування стисливості робочої рідини мають вигляд

$$\frac{dY_k}{dt} = k_k p_i - k_k p_j - k_k f(Q_k^m, x_k, t).$$

Права частина цих рівнянь лінійно залежить від тисків у вузлах, між якими розташований агрегат гідросистеми, і загалом залежить від нелінійної функції $f(Q_k^m, x_k, t)$. Для цього типу рівнянь як початкова умова має бути задана витрата робочої рідини чи швидкість рідини. Елементи, описувані таким типом рівнянь,



назвемо «проточними».

2. Рівняння, що в них під знаком диференціала стоїть значення тиску у вузлі гідросистеми (наприклад, рівняння гідроакумулятора). Права частина цих рівнянь загалом є нелінійна функція тиску у вузлі, витрат робочої рідини, переміщень і т. д. Такі рівняння мають вигляд

$$\frac{dp_1}{dt} = f(Q_k^m, x_k, p_1)$$

Для цих рівнянь початковою умовою є задане значення тиску у вузлі гідросистеми.

3. Рівняння, у яких під знаком диференціала стоїть змінний хід виконавчого штока:

$$\frac{dx_k}{dt} = v_k$$

4. Звичайні (не диференціальні) рівняння для визначення тиску у вузлах гідросистеми (наприклад, рівняння насоса і бака).

4.5 Результати досліджень перехідних процесів в об'ємному гідроприводі з розгалуженою мережею трубопроводів.

Розглянемо гідросистему, схему якої наведено на рис. 1, вона складається з «проточних» елементів і декількох тупикових вузлів. Із розглянутих агрегатів проточними елементами є гідравлічні лінії і гідроциліндри без урахування стисливості рідини. Стрілками показано прийняті за додатні напрямки витрат рідини в елементах. Елементи 1–7 – гідравлічні лінії; елементи 3, 5 – гідроциліндри. Вузли 1, 2 і 6 у даній схемі тупикові. Запишемо рівняння нерозривності потоку робочої рідини для вузлів 3, 4 і 5:

- вузол 3: $Q_1 + Q_2 - Q_{33} - Q_4 = 0$;
- вузол 4: $Q_4 - Q_{45} = 0$;
- вузол 5: $Q_{35} + Q_{55} - Q_6 = 0$.

Оскільки елементи 3 і 5 є гідроциліндри (загалом мають різні робочі площі



в порожнинах), то витрата Q_{33} рідини, яка витікає з вузла 3, не дорівнює витраті Q_{35} рідини, подаваної у вузол 5; під знаком диференціала в рівнянні гідроциліндра стоїть значення швидкості поршня. Виразимо витрати Q_{33} і Q_{35} у порожнинах гідроциліндра через швидкість поршня і відповідні площі поршня:

$$Q_{33} = S_{33}v_3; \quad Q_{35} = S_{35}v_3; \quad Q_{45} = S_{45}v_5; \quad Q_{55} = S_{55}v_5.$$

Підставивши отримані вирази для витрат у рівняння нерозривності й продиференціювавши їх, одержимо таке:

$$\begin{aligned} \frac{dQ_1}{dt} - \frac{dQ_2}{dt} - S_{33} \left(\frac{dv_3}{dt} \right) - \frac{dQ_4}{dt} &= 0, \\ \frac{dQ_4}{dt} - S_{45} \left(\frac{dv_5}{dt} \right) &= 0, \\ S_{35} \left(\frac{dv_3}{dt} \right) + S_{55} \left(\frac{dv_5}{dt} \right) - \frac{dQ_6}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

Таким чином, коефіцієнтом у рівнянні нерозривності потоку рідини за змінної швидкості штока гідроциліндра є робоча площа поршня в порожнині, з'єднаній з цим вузлом. Підставивши в наведені рівняння значення похідних, увівши скорочені позначення коефіцієнтів, одержимо вирази

$$\begin{aligned} k_1 p_1 - k_1 p_3 - k_1 \Delta p_1 - (k_2 p_3 - k_2 p_2 - k_2 \Delta p_3) - S_{33} \times \\ \times \left(\frac{S_{33}}{m_3} p_3 - \frac{S_{35}}{m_3} p_5 - \frac{1}{m_3} F(x) \right) - (k_4 p_3 - k_4 p_4 - k_4 \Delta p_3) &= 0, \\ k_4 p_3 - k_4 p_4 - k_4 \Delta p_3 - S_{45} \left(\frac{S_{45}}{m_5} p_4 - \frac{S_{55}}{m_5} p_5 - \frac{1}{m_5} F(x) \right) &= 0, \\ S_{35} \left(\frac{S_{33}}{m_3} p_3 - \frac{S_{35}}{m_3} p_5 - \frac{1}{m_3} F(x) \right) + S_{55} \left(\frac{S_{45}}{m_5} p_4 - \frac{S_{55}}{m_5} p_5 - \frac{1}{m_5} F(x) \right) - \\ - (k_6 p_5 - k_6 p_6 - k_6 \Delta p_5) &= 0. \end{aligned}$$

Запишемо отримані рівняння, залишивши ліворуч невідомі значення тисків p_3, p_4, p_5 у поточних вузлах:

$$\begin{aligned} \left(-k_1 - k_2 - k_4 - \frac{S_{33}^2}{m_3} \right) p_3 + k_4 p_4 + \frac{S_{33} S_{35}}{m_3} p_5 = \\ = -k_1 p_1 + k_1 \Delta p_1 - k_2 p_2 - k_2 \Delta p_3 - k_4 \Delta p_3 - \frac{S_{33}}{m_3} F(x), \end{aligned}$$



$$k_4 p_3 + \left(-k_4 - \frac{S_{45}^2}{m_5} \right) p_4 + \frac{S_{45} S_{55}}{m_5} p_5 = k_4 \Delta p_3 - \frac{S_{45}}{m_5} F(x),$$

$$\frac{S_{45} S_{33}}{m_3} p_3 + \frac{S_{45} S_{55}}{m_5} p_4 + \left(-k_6 - \frac{S_{35}^2}{m_3} - \frac{S_{55}^2}{m_5} \right) p_5 =$$

$$= -k_6 p_6 - k_6 \Delta p_5 + \frac{S_{35}}{m_3} F(x) + \frac{S_{55}}{m_5} F(x).$$

Одержана система рівнянь лінійна відносно тисків у проточних вузлах гідросистеми. Задавши значення тисків у тупикових вузлах, тобто p_1, p_2, p_6 , можна встановити значення тисків p_3, p_4 і p_5 , розв'язавши цю систему з трьох рівнянь. Втрати тиску Δp у лініях і величину активного навантаження на виконавчому штоці гідроциліндра $F(x)$ слід обчислити за початковим значенням витрат у відповідних лініях $Q_1, Q_2, Q_{33}, Q_{35}, Q_4, Q_{45}, Q_{55}, Q_6$ і значенням початкового положення штока x . Розв'яжемо цю систему рівнянь методом Крамера, записавши її в такий спосіб:

$$\begin{pmatrix} -k_1 - k_2 - k_4 - \frac{S_{33}^2}{m_3} & k_4 & \frac{S_{33} S_{35}}{m_3} \\ k_4 & -k_4 - \frac{S_{45}^2}{m_5} & \frac{S_{45} S_{55}}{m_5} \\ \frac{S_{33} S_{35}}{m_3} & \frac{S_{45} S_{55}}{m_5} & -k_6 - \frac{S_{35}^2}{m_3} - \frac{S_{55}^2}{m_5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 p_1 + k_1 \Delta p_{13} - k_2 p_2 - k_2 \Delta p_{32} - k_4 \Delta p_{34} - \frac{S_{33}}{m_3} Fx_3 \\ k_4 \Delta p_{34} - \frac{S_{45}}{m_5} Fx_5 \\ -k_6 p_6 - k_6 \Delta p_{56} + \frac{S_{35}}{m_3} Fx_3 + \frac{S_{55}}{m_5} Fx_5 \end{pmatrix},$$

де

$$k_1 = \frac{\pi D_1^2}{4 \rho L_1} = 2,716 \cdot 10^{-8},$$

$$k_2 = \frac{\pi D_2^2}{4 \rho L_2} = 1,539 \cdot 10^{-6},$$

$$k_4 = \frac{\pi D_4^2}{4 \rho L_4} = 1,086 \cdot 10^{-8},$$

$$k_6 = \frac{\pi D_6^2}{4 \rho L_6} = 5,772 \cdot 10^{-9},$$

$$\Delta p_{13} = \frac{4^{1,75} \cdot 0,316 \rho \nu^{0,25} L_1}{\pi^{1,75} \cdot 2 g D_1^{4,75}} Q_p^{1,75} + \frac{8 \rho \zeta_1}{\pi^2 D_1^2} Q_p^2 = 4,604 \cdot 10^9,$$

$$\Delta p_{32} = \frac{4^{1,75} \cdot 0,316 \rho \nu^{0,25} L_2}{\pi^{1,75} \cdot 2 g D_2^{4,75}} Q_p^{1,75} + \frac{8 \rho \zeta_2}{\pi^2 D_2^2} Q_p^2 = 8,079 \cdot 10^7,$$

$$\Delta p_{34} = \frac{4^{1,75} \cdot 0,316 \rho \nu^{0,25} L_4}{\pi^{1,75} \cdot 2 g D_4^{4,75}} Q_p^{1,75} + \frac{8 \rho \zeta_4}{\pi^2 D_4^2} Q_p^2 = 1,864 \cdot 10^{10},$$



$$\Delta p_{56} = \frac{4^{1,75} \cdot 0,316 \rho v^{0,25} L_6}{\pi^{1,75} \cdot 2g D_6^{4,75}} Q_p^{1,75} + \frac{8\rho \zeta_6}{\pi^2 D_6^2} Q_p^2 = 2,154 \cdot 10^{10}.$$

Дані розрахунку за методом Крамера мають такий вигляд:

$$NEIZV := \begin{pmatrix} -k_1 - k_2 - k_4 - \frac{S_{33}^2}{m_3} & k_4 & \frac{S_{33}S_{35}}{m_3} \\ k_4 & -k_4 - \frac{S_{45}^2}{m_5} & \frac{S_{45}S_{55}}{m_5} \\ \frac{S_{33}S_{35}}{m_3} & \frac{S_{45}S_{55}}{m_5} & -k_6 - \frac{S_{35}^2}{m_3} - \frac{S_{55}^2}{m_5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3,211 \cdot 10^{-6} & 1,086 \cdot 10^{-8} & 1,108 \cdot 10^{-6} \\ 1,086 \cdot 10^{-8} & -2,15 \cdot 10^{-7} & 1,75 \cdot 10^{-7} \\ 1,108 \cdot 10^{-6} & 1,75 \cdot 10^{-7} & -9,079 \cdot 10^{-7} \end{pmatrix},$$

$$IZV := \begin{pmatrix} -k_1 p_1 + k_1 \Delta p_{13} - k_2 p_2 - k_2 \Delta p_{32} - k_4 \Delta p_{34} - \frac{S_{33}}{m_3} Fx_3 \\ k_4 \Delta p_{34} - \frac{S_{45}}{m_5} Fx_5 \\ -k_6 p_6 - k_6 \Delta p_{56} + \frac{S_{35}}{m_3} Fx_3 + \frac{S_{55}}{m_5} Fx_5 \end{pmatrix}.$$

Тоді головний визначник дорівнює $\Delta = |NEIZV| = -0,260$.

Обчислимо визначник першої змінної за допомогою MathCad

$$\Delta_1(Fx_3, Fx_5) = \begin{vmatrix} (IZV^{(0)})_0 & (NEIZV^{(1)})_0 & (NEIZV^{(2)})_0 \\ (IZV^{(0)})_1 & (NEIZV^{(1)})_1 & (NEIZV^{(2)})_1 \\ (IZV^{(0)})_2 & (NEIZV^{(1)})_2 & (NEIZV^{(2)})_2 \end{vmatrix},$$

або $\Delta_1(Fx_3, Fx_5) = 6,086 \cdot 10^{-19} \cdot Fx_5 - 9,219 \cdot 10^{-19} \cdot Fx_3 - 2,672 \cdot 10^{-11}$. Далі знайдемо визначник другої змінної:

$$\Delta_2(Fx_3, Fx_5) = \begin{vmatrix} (NEIZV^{(0)})_0 & (IZV^{(1)})_0 & (NEIZV^{(2)})_0 \\ (NEIZV^{(0)})_1 & (IZV^{(1)})_1 & (NEIZV^{(2)})_1 \\ (NEIZV^{(0)})_2 & (IZV^{(1)})_2 & (NEIZV^{(2)})_2 \end{vmatrix},$$

або $\Delta_2(Fx_3, Fx_5) = 1,082 \cdot 10^{-16} \cdot Fx_3 - 3,483 \cdot 10^{-16} \cdot Fx_5 + 2,228 \cdot 10^{-10}$, також обчислимо визначник третьої змінної:

$$\Delta_3(Fx_3, Fx_5) = \begin{vmatrix} (NEIZV^{(0)})_0 & (NEIZV^{(1)})_0 & (IZV^{(2)})_0 \\ (NEIZV^{(0)})_1 & (NEIZV^{(1)})_1 & (IZV^{(2)})_1 \\ (NEIZV^{(0)})_2 & (NEIZV^{(1)})_2 & (IZV^{(2)})_2 \end{vmatrix},$$



або $\Delta_3(Fx_3, Fx_5) = 1,33 \cdot 10^{-16} \cdot Fx_3 + 5,176 \cdot 10^{-18} \cdot Fx_5 - 2,528 \cdot 10^{-11}$. Підставивши отримані дані розрахуємо значення тисків:

$$p_3(Fx_3, Fx_5) = \frac{\Delta_1(Fx_3, Fx_5)}{\Delta} = -2,281Fx_3 + 3,675Fx_5 + 1,027 \cdot 10^7,$$

$$p_4(Fx_3, Fx_5) = \frac{\Delta_2(Fx_3, Fx_5)}{\Delta} = 0,421Fx_3 + 1,14Fx_5 + 4,398 \cdot 10^7,$$

$$p_5(Fx_3, Fx_5) = \frac{\Delta_3(Fx_3, Fx_5)}{\Delta} = 0,491Fx_3 + 1,164Fx_5 + 5,131 \cdot 10^6.$$

Отриманими значеннями тисків p_3 , p_4 і p_5 можемо скористатися в процесі розрахунку правих частин диференціальних рівнянь динаміки для елементів схеми. Відтак досягти мети можемо методом математичного моделювання, яке доцільно здійснити із застосуванням пакета прикладних програм MathCad. У результаті інтегрування систем диференціальних рівнянь отримуємо залежності від часу витрат в усіх гідравлічних лініях системи та швидкості виконавчого штока гідроциліндрів.

Складемо аналітичні вирази для визначення швидкостей і переміщень поршня в гідроциліндрах:

$$\frac{d^2}{dt^2} x_3 = \frac{1}{(1 + 2,281S_{33})m_3} \left[3,675S_{33}m_5 \left(\frac{d}{dt} y_3 + 1,027 \cdot 10^7 \right) + m_3 g - F_3 \right],$$

$$\frac{d^2}{dt^2} x_5 = \frac{1}{(1 - 1,14S_{45})m_5} \left[S_{45} \left(0,421m_3 \frac{d}{dt} y_1 + 4,398 \cdot 10^7 \right) + m_5 g - F_0 - ky_2 \right].$$

Щоб застосувати вбудовану функцію $z := \text{rkfixed}(y, 0, 0, 04, 10, D)$ інтегрування методом Рунге–Кутта, у пакеті прикладних програм MathCad сформуємо вектори початкових умов та правих частин:

$$y := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D(t, y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ \frac{1}{(1 + 2,281s_{33}) \cdot m_3} \cdot \left[s_{33} \cdot 3,675 \cdot m_5 \cdot \left[\left(\frac{d}{dt} y_3 + 1,027 \right) \cdot 10^7 \right] + m_3 \cdot g + F_3 \right] \\ y_3 \\ \frac{1}{(1 + 1,14s_{45}) \cdot m_5} \cdot \left[s_{45} \cdot \left[0,421 \cdot m_3 \cdot \left(\frac{d}{dt} y_3 \right) + 4,398 \cdot 10^7 \right] + m_5 \cdot g - F_0 - k \cdot y_2 \right] \end{pmatrix}$$

Результати математичного моделювання у пакеті прикладних програм



MathCad матимуть вигляд таблиці (рис. 3).

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	$4 \cdot 10^{-3}$	76.026	$3.801 \cdot 10^4$	97.947	$4.897 \cdot 10^4$
2	$8 \cdot 10^{-3}$	304.104	$7.603 \cdot 10^4$	391.744	$9.792 \cdot 10^4$
3	0.012	684.234	$1.14 \cdot 10^5$	881.261	$1.468 \cdot 10^5$
4	0.016	$1.216 \cdot 10^3$	$1.521 \cdot 10^5$	$1.566 \cdot 10^3$	$1.957 \cdot 10^5$
5	0.02	$1.901 \cdot 10^3$	$1.901 \cdot 10^5$	$2.446 \cdot 10^3$	$2.444 \cdot 10^5$
6	0.024	$2.737 \cdot 10^3$	$2.281 \cdot 10^5$	$3.522 \cdot 10^3$	$2.931 \cdot 10^5$
7	0.028	$3.725 \cdot 10^3$	$2.661 \cdot 10^5$	$4.791 \cdot 10^3$	$3.416 \cdot 10^5$
8	0.032	$4.866 \cdot 10^3$	$3.041 \cdot 10^5$	$6.254 \cdot 10^3$	$3.899 \cdot 10^5$
9	0.036	$6.158 \cdot 10^3$	$3.421 \cdot 10^5$	$7.91 \cdot 10^3$	$4.381 \cdot 10^5$
10	0.04	$7.603 \cdot 10^3$	$3.801 \cdot 10^5$	$9.759 \cdot 10^3$	$4.861 \cdot 10^5$

Рисунок 3 – Результати математичного моделювання у пакеті прикладних програм MathCad.

Авторська розробка

З аналізу результатів видно, через 4 с після початку переміщення поршень 3 зміститься на 44 см, а поршень 5 – на 28 см. Графіки залежності переміщення поршнів від часу будуть такими, як на рис. 4 та рис. 5 відповідно.

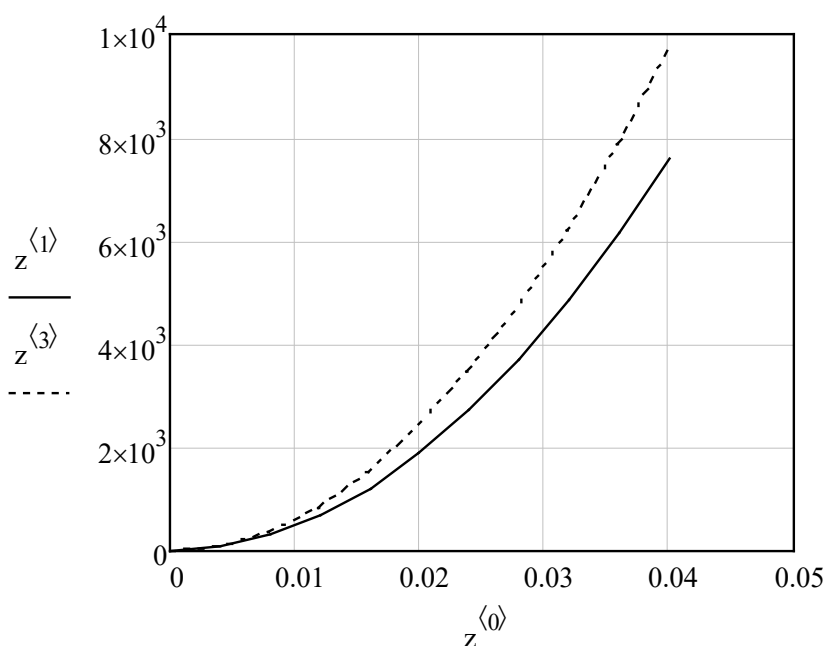


Рисунок 4 – Графіки залежності переміщення поршнів гідроциліндра 3 від часу

Авторська розробка

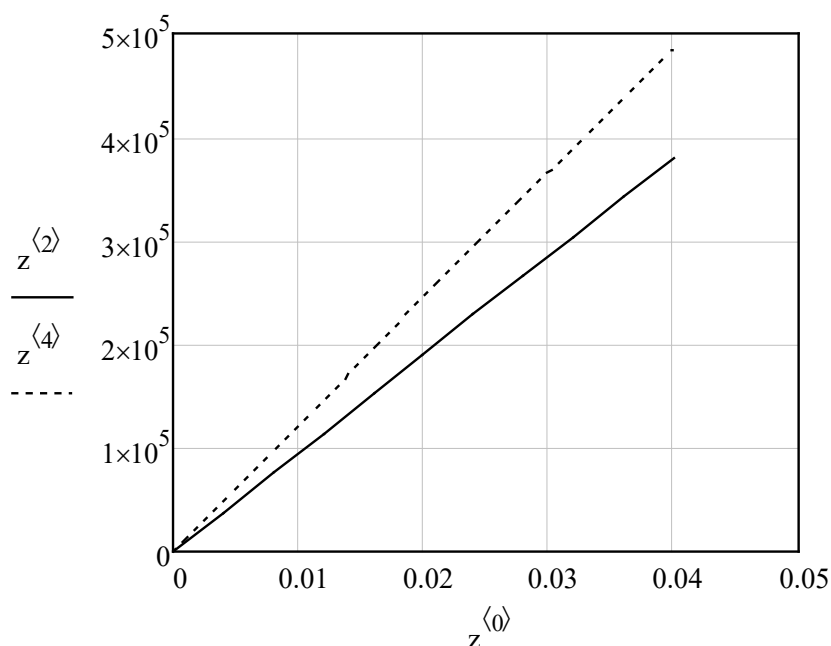


Рисунок 5 – Графіки залежності переміщення поршнів гідроциліндра 5 від часу.

Авторська розробка

Результати математичного моделювання витрат у гідроциліндрі 3 наведено на рис.6.

$$Q_{33} := s_{33} \cdot z^{(2)},$$

	0
0	0
1	$1.064 \cdot 10^6$
2	$2.129 \cdot 10^6$
3	$3.193 \cdot 10^6$
4	$4.257 \cdot 10^6$
5	$5.322 \cdot 10^6$
6	$6.386 \cdot 10^6$
7	$7.451 \cdot 10^6$
8	$8.515 \cdot 10^6$
9	$9.579 \cdot 10^6$
10	$1.064 \cdot 10^7$

Рисунок 6 – Результати математичного моделювання витрат у гідроциліндрі 3 із застосуванням пакету прикладних програм MathCad

Авторська розробка

Результати математичного моделювання витрат у гідроциліндрі 5 наведено на рис.7.



	0
0	0
1	$7.222 \cdot 10^5$
2	$1.444 \cdot 10^6$
3	$2.167 \cdot 10^6$
4	$2.889 \cdot 10^6$
5	$3.611 \cdot 10^6$
6	$4.333 \cdot 10^6$
7	$5.056 \cdot 10^6$
8	$5.778 \cdot 10^6$
9	$6.5 \cdot 10^6$
10	$7.222 \cdot 10^6$

$Q_{35} =$

$Q_{35} := s_{35} \cdot z^{(2)}$

Рисунок 7 – Результати математичного моделювання витрат у гідроциліндрі 3 із застосуванням пакету прикладних програм MathCad

Авторська розробка

Результати математичного моделювання подачі в гідроциліндрі 3 наведено на рис. 8.

	0
0	0
1	$3.428 \cdot 10^5$
2	$6.855 \cdot 10^5$
3	$1.028 \cdot 10^6$
4	$1.37 \cdot 10^6$
5	$1.711 \cdot 10^6$
6	$2.051 \cdot 10^6$
7	$2.391 \cdot 10^6$
8	$2.73 \cdot 10^6$
9	$3.067 \cdot 10^6$
10	$3.403 \cdot 10^6$

$Q_{45} =$

$Q_{45} := s_{45} \cdot z^{(4)}$

Рисунок 7 – Результати математичного моделювання подачі у гідроциліндрі 3 із застосуванням пакету прикладних програм MathCad

Авторська розробка

Результати математичного моделювання подачі у гідроциліндрі 5 наведено на рис. 9.



	0
0	0
1	$2.938 \cdot 10^5$
2	$5.875 \cdot 10^5$
3	$8.81 \cdot 10^5$
4	$1.174 \cdot 10^6$
5	$1.467 \cdot 10^6$
6	$1.758 \cdot 10^6$
7	$2.049 \cdot 10^6$
8	$2.34 \cdot 10^6$
9	$2.629 \cdot 10^6$
10	$2.917 \cdot 10^6$

$Q_{55} =$

$Q_{55} := s_{55} \cdot z^{(4)}$

Рисунок 9 – Результати математичного моделювання подачі у гідроциліндрі 5 із застосуванням пакету прикладних програм MathCad.

Авторська розробка

Застосування пакету прикладних програм MathCad дозволяє ефективно розв'язувати інженерні задачі в галузі гідравліки та гідроприводів. Математичне моделювання динамічних процесів у гідросистемі дозволяє встановити залежності подачі у гідроциліндрах 3 та 5 на проміжку від 0 до 4 с.

Висновки

Аналіз результатів математичного моделювання дозволяє на етапі проектування обрати геометричні параметри гідравлічних агрегатів і трубопроводів для забезпечення заданих параметрів руху поршнів гідроциліндрів. Запровадження математичного моделювання при монтажу та налагодженні гідросистеми дозволить контролювати розбіжності між діючими та розрахунковими значеннями швидкостей переміщення поршнів та подачі у гідроциліндрах.

Подяки

Представлені у статті результати отримані авторами під час досліджень за темами 0119U101151 «Теоретико-методологічні основи проектування, функціонування та діагностування механотронних і робототехнічних систем».